



Ondelettes géométriques adaptatives : vers une utilisation de la distance géodésique

Guillaume Lebrun

► To cite this version:

Guillaume Lebrun. Ondelettes géométriques adaptatives : vers une utilisation de la distance géodésique. Autre [cs.OH]. Université de Poitiers, 2009. Français. NNT : . tel-00429641

HAL Id: tel-00429641

<https://theses.hal.science/tel-00429641>

Submitted on 3 Nov 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

pour l'obtention du Grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS
(Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées)
(Diplôme National - Arrêté du 7 août 2006)

École Doctorale : **Sciences pour l'Ingénieur**
Secteur de Recherche : **Traitement du signal et des images**

Présentée par :
Guillaume Lebrun

Ondelettes géométriques adaptatives : vers une utilisation de la distance géodésique

Directrice de Thèse : Mme Christine FERNANDEZ-MALOIGNE
Co-directeur de Thèse : Mr Philippe CARRÉ
Co-directeur de Thèse : Mr Stéphane PATEUX

Candidature de soutenance le 31 mars 2009 devant la Commission d'Examen composée de :

Mr Olivier Laligant, Professeur, Université Bourgogne, Le2iPrésident du Jury
Mr Florent Dupont, Maître de Conférences HDR, Université Lyon, LIRIS Rapporteur
Mr Touradj Ebrahimi, Professeur, École Polytechnique de Lausanne, EPFLRapporteur
Mr Philippe Carré, Maître de Conférences, Université Poitiers, XLIM-SIC Co-directeur de Thèse
Mr Stéphane Pateux, Ingénieur Recherche, Orange Labs Co-directeur de Thèse
Mme Christine Fernandez-Maloigne, Professeur, Université Poitiers,XLIM-SIC Directrice de Thèse

Table des matières

1	Ondelettes géométriques	11
1.1	Pourquoi des ondelettes géométriques?	11
1.1.1	Transformée géométrique à fonctions d'analyse fixes	14
1.1.2	Transformées adaptatives	19
1.1.3	Résumé	28
1.2	Problématique de la thèse	30
1.2.1	Transformée en Bandelettes de première génération	31
1.2.2	Transformée géodésique	31
2	Transformée en bandelettes première génération	33
2.1	Transformée en bandelettes à redondance faible	33
2.1.1	Identifications des singularités	34
2.1.2	Création des zones de bandelettes par feu de prairie	42
2.1.3	Déformation des zones	43
2.1.4	Coefficients de bandelettes	45
2.1.5	Estimation de l'image du résidu	47
2.1.6	Reconstruction	50
2.1.7	Application à la suppression du bruit	50
2.1.8	Bilan	58
2.2	Transformée en bandelettes à redondance forte	59
2.2.1	Construction des zones de contours	59
2.2.2	Prise en compte du résidu	60
2.2.3	Reconstruction - Profils de pondération	61
2.3	Application à la restauration d'image	62
2.3.1	Application au débruitage	64
2.3.2	Suppression de l'effet de bloc	71
2.4	Analyses et critiques	75
3	Ondelettes et distance géodésique	77
3.1	Lifting Scheme et distance géodésique	78
3.1.1	Filtrage bilatéral	78
3.1.2	Schéma de lifting pondéré	80
3.2	Introduction de la distance géodésique	82

TABLE DES MATIÈRES

3.2.1	Distance géodésique en imagerie	82
3.2.2	Rappel des variétés	84
3.3	Topologie de la variété	86
3.3.1	Principe de l'algorithme	87
3.3.2	Comportement de l'algorithme	88
3.4	Condition de l'obtention d'une distance	92
3.4.1	Graphes et distance	92
3.4.2	Construction du graphe non orienté	95
3.5	Recherche du plus court chemin	98
3.5.1	Arbres couvrants	99
3.5.2	Algorithme de recherche	100
3.5.3	Conditions d'arrêt	101
3.5.4	Distances à l'échantillon central	102
3.6	Mise en oeuvre de la transformée	104
3.6.1	Décimation par treillis quinconces	104
3.6.2	Transposition de l'algorithme à trous	106
3.7	Comportement de la transformée	108
3.8	Application à la restauration d'image	112
3.8.1	Application au débruitage	112
3.8.2	Suppression de l'effet de blocs	120
3.9	Analyses et critiques	122

Résumé

La transformée en ondelettes a été introduite ces dernières années dans le domaine du traitement des données multimédia car elle permet une représentation compacte des informations. C'est pourquoi cette représentation s'avère très bien adaptée au traitement des images, notamment dans la prise en compte de certaines de leurs singularités. Toutefois le schéma d'analyse le plus souvent utilisé est un modèle séparable peu adaptatif. Très récemment des améliorations ont été obtenues en adaptant l'ensemble des fonctions d'analyse constituant la transformée aux singularités de l'image. L'une des familles de solutions s'appelle les transformées en ondelettes géométriques. C'est dans ce cadre que ce travail de thèse va s'inscrire.

La première transformée en ondelettes géométriques adaptatives que nous étudions est la transformée en bandelettes de première génération proposée par Le Pennec (Le Pennec E. et al. ICIP 2000). Cette transformée exploite un processus de détection de contours effectué sur l'image afin de déformer l'ensemble des fonctions d'analyse et de synthèse associées à la transformée, ceci pour les adapter aux contours détectés. La transformée étant essentiellement définie dans le domaine continu, nous avons repris le concept de chaque étape (détection de contours - boîte englobante - transformée sur l'intervalle) de la transformée afin d'en définir une alternative plus directement en lien avec les contraintes du schéma numérique. Nous avons également orienté cette étude suivant une application de restauration d'image. Cela nous a conduit à la définition d'une variante de la transformée ayant une redondance plus importante que la version initiale.

Nous avons ensuite proposé d'améliorer la souplesse de la prise en compte des singularités à travers une nouvelle transformée, en partant du principe que le contour n'était pas forcément le meilleur moyen pour caractériser la géométrie d'une image.

Cette deuxième transformée en ondelettes géométriques adaptatives que nous proposons s'appuie sur un schéma de lifting basé sur des treillis quinquiconces pour obtenir une montée en échelles plus adaptée qui ne privilégie aucune direction particulière lors de la décimation. Ce schéma se traduit par des fonctions d'analyse dont le comportement est très similaire aux fonctions d'analyse employées dans le filtrage bilatéral (Tomasi C. et al. ICCV 1998). Le filtrage bilatéral s'adapte à la géométrie de l'image à partir de la distance euclidienne entre les éléments présents dans le support de la fonction d'analyse. Nos fonctions d'analyses feront de même mais à partir de la distance géodésique. Nous définissons alors ce que nous entendons par distance géodésique dans le cadre des signaux, notamment en ce qui concerne la remise en cause de leur topologie. Le type de singularité que nous mettrons en valeur à travers cette transformée ne sera alors plus le contour puisque

nous ne privilégierons pas de forme particulière. Le support des fonctions d'analyse et de synthèse va avoir des formes beaucoup plus diverses que dans le cadre de la transformée en bandelettes. En effet, le support d'une fonction à une même échelle peut varier du simple pixel à une grande partie de l'image à travers la mise en valeur des composantes connexes de l'image. L'adaptation des fonctions d'analyse ne se fait plus sur une singularité en particulier, mais à travers les frontières des principales zones constituant l'image.

Ces deux transformées seront confrontées aux applications de suppression de bruit et de suppression de l'effet de blocs lié à la compression d'une image JPEG. Nous commenterons l'ensemble de ces résultats afin de mettre en évidence les apports ainsi que les limites de ces approches.

Remerciements

Cette thèse a été effectuée dans le cadre d'une convention CIFRE associant le département SIC du laboratoire XLIM et le laboratoire Orange Labs (plus particulièrement l'équipe TECH/IRIS/CVA).

Je remercie tout d'abord Florent Dupont, Touradj Ebrahimi et Olivier Laligant pour avoir accepté de faire parti de mon jury de thèse et ce faisant, pour le temps qu'ils ont consacré à mon manuscrit. J'ai apprécié les conseils qu'ils m'ont par la suite prodigués dans leur rapport et au cours de ma soutenance de thèse.

Je remercie Christine Fernandez-Maloigne, ma directrice de thèse, pour son accueil dans le laboratoire, ses conseils et plus particulièrement en ce qui concerne la couleur en traitement du signal et des images. Ma thèse n'a pas fait honneur à tous ses conseils étant donné le sujet initial, mais j'espère que j'aurai l'occasion de réparer ce manquement par la suite.

Je tiens également à remercier Stéphane Pateux pour son soutien et le recul dont il a fait preuve sur les avancées de ma thèse.

Enfin, toujours parmi mes encadrants, je tiens à remercier Philippe Carré qui m'a beaucoup appris durant cette thèse. J'ai profité de ses conseils et de ses remarques pour améliorer mon approche du travail scientifique. Je le remercie également pour l'enthousiasme qu'il m'a communiqué sur le plan sportif : j'ai beaucoup progressé dans la course à pied grâce à son insistance pour aller s'entraîner.

Je tiens également à remercier les membres du département SIC du laboratoire XLIM, pour leur accueil. Ils m'ont offert un cadre de travail vraiment enrichissant et m'ont montré que la recherche est vraiment un travail passionnant. Plus particulièrement je remercie Bertrand et Benoît pour leur aide en ce qui concerne les EDP et les variétés, David un autre collègue avec lequel je me suis entraîné à la course à pied et avec lequel j'ai eu de très intéressantes discussions dans le domaine de cette thèse. Un remerciement également aux collègues doctorants ou récents docteurs du SIC : Carlos, Olivier, Pierre-François, Martin, Sébastien, Mathieu, Aldo, Alexandre, Vincent, Marc, Ghislain, Romain, Sylvain et plus généralement l'ensemble des doctorants. Travailler à leur côté fut agréable et m'a permis également de relativiser les difficultés auxquelles j'ai été confronté durant ma thèse.

Je remercie mes amis de plus longue date Dimitri, Cédric, Benoît, Julien, Jonathan, Damien, Jérôme, Yohann, Matthieu, Ermann, Antoine, Alexandre, Emmanuel, qui m'ont aidé tout au long de mes études et encore tout récemment, en rendant cette période plus agréable à vivre, notamment à certaines étapes clés où il fait bon de pouvoir se changer les idées. Je tiens également à exprimer un remerciement à mes anciens voisins qui sont

Résumé

venus me soutenir lors de ma soutenance.

Je tiens enfin à remercier mes parents, mon frère et ma soeur pour leur soutien et leur patience tout au long de mes études et plus particulièrement sur la fin de la rédaction de ce manuscrit.

Introduction

La transformée en ondelettes est l'un des outils de ces dernières années qui a rencontré le plus de succès auprès de la communauté scientifique dans le domaine du traitement du signal et de l'image. Elle a, en effet, permis d'enrichir le choix des outils du traitement du signal. Elle trouve sa consécration dans le domaine de la compression d'images et de séquences d'images, à travers la norme JPEG2000 qui améliore les performances de JPEG. La transformée en ondelettes, comme la transformée de Fourier, permet la décomposition du signal à partir d'une base orthogonale de fonctions d'analyse, mais en introduisant une localisation de l'information extraite par l'analyse (fonction d'analyse à support fini) et un aspect multi-résolution. Cette transformée offre également une plus grande liberté quant au choix des fonctions d'analyse constituant la transformée, proposant par exemple une meilleure localisation spatiale ou une meilleure localisation fréquentielle et permettant ainsi de spécialiser la transformée à une application donnée.

Dans le cadre de cette thèse, nous allons limiter notre étude aux images. Avec ce type de signal s'ajoute, pour la transformée en ondelettes, la problématique de la prise en compte de la géométrie de l'image. La transformée en ondelettes classique 2D issue d'une construction séparable des fonctions d'analyse donne des résultats dans certaines applications mais ne prend pas en compte l'organisation spatiale des singularités. Elle prend en charge ces singularités puisqu'elle les appréhende à travers chaque ligne et chaque colonne de l'image mais elle le fait à la manière d'un signal 1D. C'est pour cela que des transformées en ondelettes spécifiques aux images sont apparues. Le but de ces transformées est de jouer sur la liberté qu'offrent les fonctions non séparables 2D dans la construction de fonctions d'analyse adaptées à la géométrie de l'image.

L'objectif principal de la thèse sera donc une étude de certaines transformées en ondelettes géométriques pour des applications en restauration d'image. Les applications de restauration que nous étudierons sont plus précisément, la suppression du bruit et la suppression des effets de blocs issus de la compression des images à partir de la norme JPEG. La confrontation simultanée de transformée en ondelettes géométriques à ces deux types de détérioration est intéressante car la taille du motif correspondant varie d'une détérioration à l'autre. Nous avons dans le premier cas, étant donné le type du bruit que nous utiliserons pour nos tests (blanc gaussien), un motif de la détérioration que nous pouvons assimiler au pixel lui-même. Dans le cadre de la suppression d'effet de blocs le motif est beaucoup plus important puisqu'il correspond aux zones carrées de taille 8×8 (16×16 ou 32×32) de la transformée locale en cosinus discrets. Analyser la restauration pour les deux types de motifs indique le comportement des transformées en ondelettes

face à différentes "géométries" de détérioration. La question sera de savoir dans quelle mesure une transformée en ondelettes géométriques peut influencer la suppression d'une détérioration ayant sa propre "géométrie".

Afin de situer les transformées que nous présentons dans cette thèse, nous allons débiter, avec le premier chapitre, par un rappel des transformées en ondelettes géométriques existantes. L'objectif de ce rappel sera d'offrir au lecteur une vision la plus large possible des transformées en ondelettes géométriques. À travers ce rappel, nous ferons émerger le principe des ondelettes géométriques à partir de deux catégories qui semblent se dessiner : les transformées en ondelettes géométriques à bases fixes et les transformées en ondelettes géométriques adaptatives. Nous verrons également deux manières de calculer la transformée suivant qu'elle est conçue ou non à partir d'un schéma dit de lifting. Les transformées utilisant ce schéma de lifting auront tendance à intégrer la géométrie dans la fonction d'analyse alors que, dans le cas contraire, la transformée aura plutôt tendance à remettre en cause l'ordonnancement du signal avant d'effectuer une transformée en ondelettes séparables.

Dans le deuxième chapitre, nous avons étudié tout particulièrement l'une de ces transformées en ondelettes géométriques adaptatives : la transformée en bandelettes de première génération d'Erwan Le Pennec [42]. S'appuyant sur une identification de la géométrie de l'image à partir de la détection de ses contours, cette transformée en ondelettes adapte le signal à la structure de la transformée en ondelettes séparable 2D. Des bandes sont construites autour des contours détectés, puis déformées afin d'adapter leur contenu à la transformée en ondelettes séparables : une singularité de l'image est, après déformation, assimilable à une ligne ou une colonne. Nous avons étudié cette transformée dans le cadre de la restauration d'images. Il n'existe pas à ce jour d'implantation libre disponible ou même de proposition algorithmique de la décomposition d'Erwan Le Pennec. L'étude de cette transformée nous a amené à la définition d'une alternative cherchant une transposition plus directement liée au domaine discret de la transformée. Nous allons proposer une version simplifiée de la transformée, notamment en ce qui concerne les contraintes de formes sur les bandes en jouant sur la liberté qu'offre la redondance. Nous évaluerons cette transformée numérique sur des applications de suppression de bruit et de suppression de l'effet de blocs que nous avons évoquées précédemment.

Nous constaterons, à travers cette transformée, une forme de séparation arbitraire des échantillons de l'image puisque fonction de paramètres tels que l'épaisseur des bandes, ou le seuil utilisé pour l'identification des pixels de contours qui influencera la distribution de ceux-ci. Cette séparation est une source de difficultés pour le comportement de la transformée en Bandelettes de première génération. Nous allons chercher à définir, dans le troisième et dernier chapitre, une transformée en ondelettes géométriques adaptatives dont la séparation des éléments sera la conséquence de l'identification de la géométrie et sur laquelle s'appuiera l'adaptation des fonctions d'analyse. Dans cette nouvelle transformée, notre source de problème deviendra l'outil de notre prise en compte de la géométrie. Ce travail trouve son origine dans l'étude des variétés et de leur intégration de la forme d'un ensemble. Il s'est ensuite concentré sur l'un des aspects associés aux variétés : la distance

géodésique.

Une partie de la présentation sera alors consacrée à la définition de ce que nous entendons par distance géodésique pour un signal directement appréhendé dans le domaine discret. Ce changement de point de vue sur le signal que constitue la variété, aura en fait des répercussions sur les caractéristiques globales du signal : en considérant le signal comme une variété, nous allons remettre en cause sa topologie et par la même occasion la distribution de ses composantes connexes. Cette évolution aura des conséquences qui mettront en valeur les singularités de l'image : si un contour correspond à la frontière entre deux composantes connexes de l'image, la distance géodésique entre deux éléments du signal, de part et d'autre du contour, sera infinie. Exploité à travers un schéma de lifting, notre distance géodésique permettra de prendre en compte les singularités de l'image quelles que soient leurs tailles tout en prenant en compte le contexte de cette singularité : la distance géodésique prend en compte la configuration globale de l'image. Nous voyons apparaître, à travers ce schéma, la séparation des échantillons du signal en fonction de la géométrie de l'image. Nous reviendrons sur ce comportement très particulier de la distance géodésique et sur l'information qu'elle apporte à une transformée en ondelettes géométrique tout au long de la présentation des étapes de la transformée. Nous confronterons enfin la transformée aux applications de suppression de bruit et de suppression de l'effet de blocs comme pour la transformée en bandelettes de première génération.

Cette dernière partie nous ouvrira de nombreuses perspectives que nous détaillerons à la fin de ce mémoire.

Chapitre 1

Ondelettes géométriques

1.1 Pourquoi des ondelettes géométriques ?

Les transformées en ondelettes font partie des outils de représentation creuse des signaux. L'idée est de représenter la majeure partie des informations du signal à partir d'un nombre de coefficients le plus restreint possible. En lien avec la modélisation du signal dont découle le choix de la famille des fonctions analysantes, cela permet de multiples traitements. Parmi les premières représentations creuses, la transformée de Fourier consiste en la décomposition d'un signal à partir d'une famille orthogonale de sinusoides dont le support correspond au support du signal analysé. Cette représentation, idéale dans le cas des signaux réguliers, ne se comporte pas aussi bien que nous le souhaiterions pour des signaux contenant des singularités : la fonction analysante, captera nécessairement une partie de l'information correspondant à la singularité. Cela correspond à une dispersion de l'énergie qui est à l'opposé de ce que l'on recherche dans les représentations creuses. Un autre problème de cette transformée est qu'elle ne comporte aucune information spatiale et ne permet donc aucune mise en correspondance entre un coefficient émergeant dans la transformée et la localisation potentielle d'un phénomène.

La transformée en ondelettes [47] à travers une construction multirésolution et l'exploitation de fonctions d'analyse à support compact propose une alternative à la transformée de Fourier. Cette transformée est idéale pour la représentation des signaux réguliers par morceaux 1D avec, de plus, une localisation plus efficace des singularités du signal du fait de l'utilisation des fonctions d'analyse à support compact.

Néanmoins, son application dans le traitement des images a fait apparaître de nouveaux schémas car l'optimalité de la transformée pour la représentation des signaux réguliers par morceaux n'est pas vérifiée pour les signaux à deux dimensions. Le but de ces transformées est d'améliorer la concentration de l'énergie dans un minimum de coefficients de transformée pour aller dans le sens d'une représentation creuse. Cette concentration correspond à une amélioration de la décroissance de l'erreur quadratique entre l'image initiale et l'image reconstruite au fur et à mesure de la prise en compte des coefficients de plus basse énergie.

L'optimalité de cette décroissance pour les signaux 1D est due à la conception spécifique des fonctions d'ondelettes et d'échelles. Pour les signaux 2D, nous pouvons effectuer une transposition de la transformée en utilisant la séparabilité du produit de convolution des

fonctions analysantes [47]. Par contre l'utilisation de cette version de la transformée ne garantit plus l'optimalité de la transformée. Cela est dû au choix arbitraire des directions d'analyse de l'image : l'analyse sera efficace principalement pour des singularités verticales ou horizontales.

Afin d'illustrer cette caractéristique de la transformée en ondelettes 2D séparable, nous avons généré plusieurs droites formées par le même nombre de pixels mais ayant des directions différentes. La figure 1.1 correspond à une partie des 29 droites générées pour le test (leurs orientations allant de 0 à 45 degrés par rapport à l'horizontal).

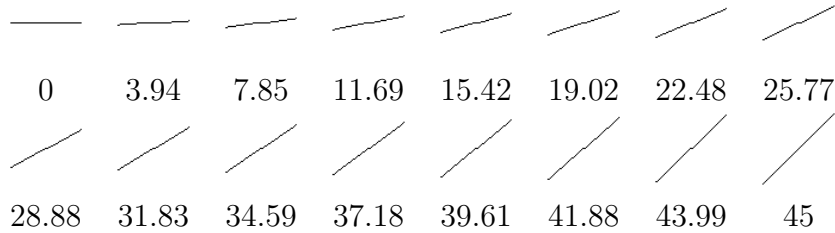


Figure 1.1: Une partie des images de test (négatif de l'image étudiée avec en dessous l'angle correspondant).

Nous avons, à chacune des images contenant les droites, appliqué une transformée en ondelettes avec la fonction d'ondelettes de Daubechies à 10 moments nuls. Nous avons ensuite supprimé tous les coefficients dont la valeur absolue se situait en dessous de 100 (pour un intervalle des données correspondant à $\llbracket 0, 255 \rrbracket$). Une fois la transformation inverse effectuée nous avons mesuré l'énergie restante en fonction de l'énergie des images initiales (toutes les images initiales ayant la même énergie). La courbe 1.2 donne les pourcentages d'énergie restituées. On peut constater que l'énergie ne diminue pas qu'en fonction du seuil choisi mais bien également en fonction de la direction de la singularité traitée.

Nous proposons dans la figure 1.3 quelques unes des synthèses des images de droites une fois le seuillage effectué afin d'illustrer le comportement de la transformée séparable 2D. Ces illustrations, ainsi que la courbe de la figure 1.2 montrent que le comportement de cette transformée (en termes de concentration de l'énergie) réagit différemment en fonction des caractéristiques de la singularité étudiée. En particulier la figure 1.2 indique que la restitution de l'énergie par la transformée 2D séparable diminue au fur et à mesure que l'angle se rapproche de 45° pour une singularité correspondant à un segment. Les formes que prennent les singularités dans les images réelles sont bien plus complexes, mais déjà ces simples cas de figures illustrent la problématique de la transposition de la transformée ondelettes pour les données 2D.

Afin d'illustrer l'effet de ce seuil sur des données non synthétiques nous l'avons appliqué à l'image Lena. Le choix volontairement exagéré de la valeur du seuil nous permet d'illustrer dans la figure 1.4 les désagréments de l'approche séparable 2D que l'on cherche à réduire avec les transformées géométriques.

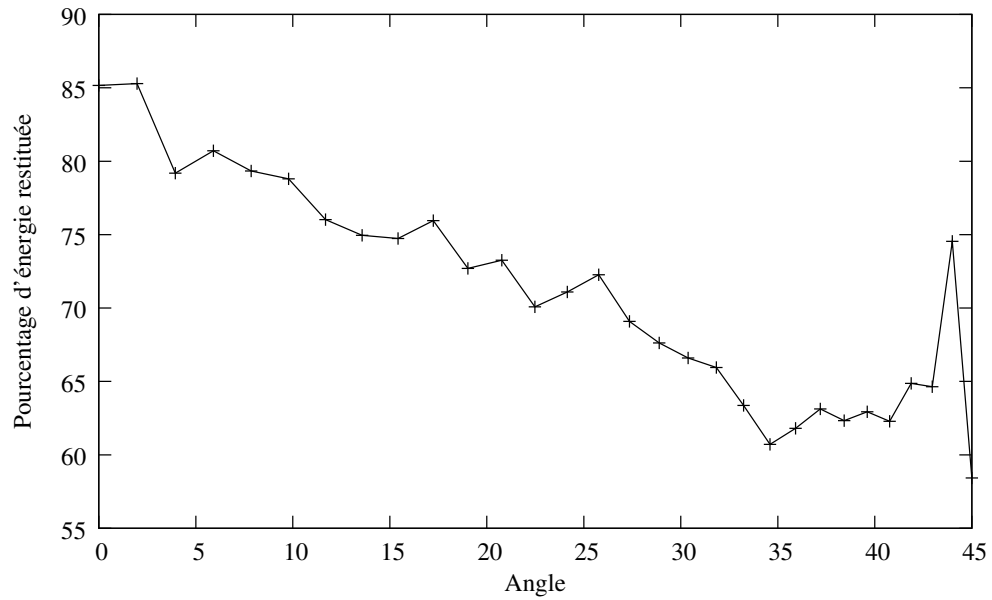


Figure 1.2: Énergie restante une fois les coefficients supprimés.

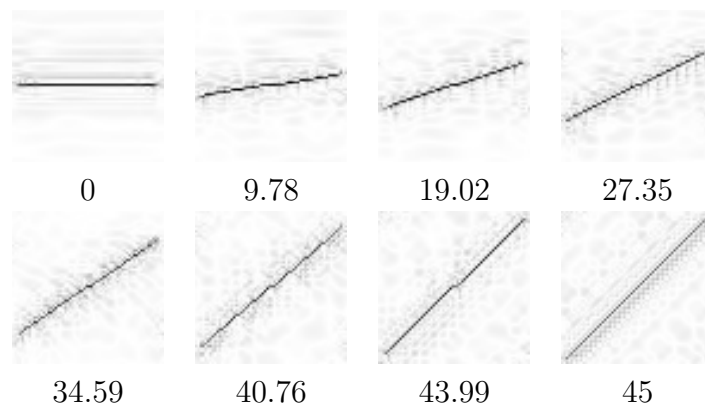


Figure 1.3: Synthèse après suppression des coefficients de basse énergie (image en négatif).



Figure 1.4: Application de la même suppression des coefficients de basse énergie que pour les droites appliquée à l'image Lena.

Nous voyons avec cet exemple que le comportement de la transformée 2D séparable par rapport à la direction du motif étudié induit une amplification de l'effet de Gibbs pour les contours dont la direction locale n'est ni horizontale, ni verticale. L'effet de Gibbs se produit au niveau d'une frontière, lorsque le nombre de coefficients pour décrire celle-ci est très limité. En fait dans ce cas là, au lieu de produire une inévitable dispersion de l'énergie horizontalement (pour les contours verticaux) ou verticalement (pour les contours horizontaux), il se produit une dispersion dans les deux directions. Ces effets sont particulièrement visibles avec la figure 1.4 : les ruptures franches obliques de l'image initiale diminuent avec l'ajout de contours fantômes parallèles.

Nous allons donc maintenant rappeler différentes transformations dont le but sera justement de prendre en charge localement cette direction. Nous allons voir qu'il existe plusieurs approches du problème. Elles ont toutes pour objectif de prendre en compte le "motif" formé par les singularités du signal. Cette prise en compte se fait au travers de l'ensemble du dictionnaire de fonctions d'analyse. Nous verrons que certaines d'entre elles (les transformées adaptatives) s'accompagneront de méthodes de détection explicite de ce motif avant d'entreprendre la transformée en ondelettes.

Nous débutons notre description des transformées géométriques par les transformées basées sur un dictionnaire de fonctions défini indépendamment du contenu de l'image.

1.1.1 Transformée géométrique à fonctions d'analyse fixes

Le principe des transformées en ondelettes à dictionnaire de fonctions d'analyse fixes, telle que la transformée en ondelettes séparable 2D, veut que l'on ne puisse pas changer les fonctions d'analyse de la transformée d'une image à l'autre. Il est bien entendu possible

que suivant la taille de l'image, le nombre d'échelles disponibles et donc le nombre de versions translatées de l'ondelette mère utilisées varient. Néanmoins cette définition du dictionnaire des fonctions d'analyse ne dépend en rien du contenu des échantillons à l'inverse des transformées adaptatives.

Nous débuterons par la description de ces transformées géométriques avec l'une des premières proposée dans la littérature.

Transformée Ridgelet La transformée Ridgelet [34], [12] compte parmi les premières transformées en ondelettes géométriques. Elle correspond à la construction d'un dictionnaire de fonctions d'analyse s'appuyant sur la transformée de Radon : les fonctions d'analyse résultantes correspondent à la mise en valeur des ruptures linéaires dans l'image. En effet, la transformée de Radon produit un ensemble de projections selon des directions données : intégration selon des droites (voir figure 1.5). L'analyse par Ridgelet revient à appliquer une transformée de Radon sur le signal traité, puis à calculer une transformée en Ondelettes sur chaque résultat de projection.

L'intérêt de cette transformée est de permettre de concentrer efficacement l'énergie d'un signal régulier par morceaux sur quelques coefficients tout comme dans la transformée en ondelettes. De plus, contrairement à la transformée en ondelettes, cette transformée permet de prendre en charge des ruptures 2D linéaires.

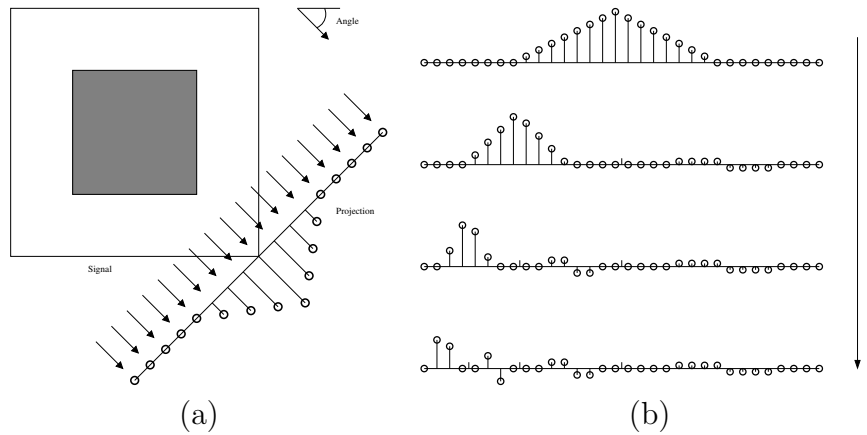


Figure 1.5: (a) Projection Radon. (b) Traitement des différentes projections par la transformée en Ondelettes.

Afin de développer une approche numérique, plusieurs pistes ont été étudiées. Une application de la stratégie avec la transformée Fourier 2D et une interpolation est proposée par Starck *et al.* [58], une transformée Radon discrète est proposée par Do *et al.* [29] mais elle impose que la taille de l'image corresponde à un nombre premier. À noter également la transformée Ridgelet analytique discrète [14, 38] proposant une prise en charge du passage par Fourier en faisant l'approximation qu'une projection de Radon correspond à l'inversion d'un ensemble discret de coefficients de la transformée de Fourier discrète

sans interpolation. Les coefficients liés à la projection sont extraits à partir d'équations traduisant des objets discrets tels que des droites [4] ou des plans [3] discrets.

Afin d'améliorer l'adaptivité de la transformée aux singularités de l'image, une variante de cette transformée a été proposée : la transformée Curvelet.

Transformée Curvelet La transformée en Curvelet [13], [58] correspond à l'association de différentes étapes : l'application de filtres passe-bandes, d'une segmentation dyadique de chaque bande de fréquence et de la transformée Ridgelet sur chaque zone segmentée (schématisée par la figure 1.6). La décomposition fréquentielle associée à la segmentation dyadique permet de conditionner les données pour la transformée Ridgelet dans le but de décrire des singularités dont la taille et la forme du motif varient. Ces enrichissements de la description s'accompagne d'une variabilité en position : position associée aux différentes zones dyadiques.

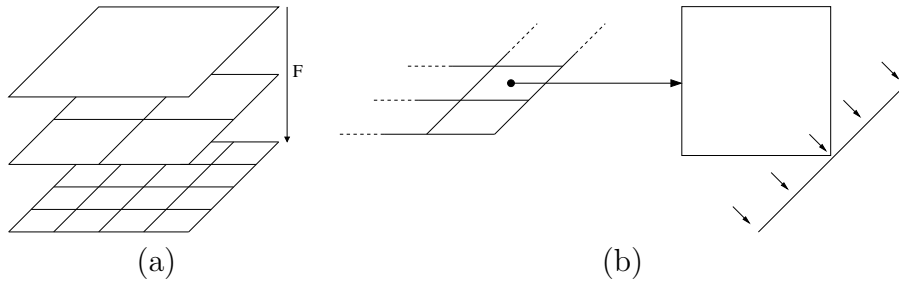


Figure 1.6: (a) Décomposition fréquentielle par banc de filtres. (b) Application de la transformée Ridgelet sur chaque zone dyadique.

L'intérêt de cette variante est de permettre la prise en charge de rupture dans le signal dont le motif est plus complexe que dans la transformée Ridgelet, tout en gardant les avantages d'une meilleure adéquation entre les fonctions d'analyse et le signal décrit.

Cette transformée est donc plus adaptée aux ruptures d'une image réelle dans le sens où approximer un contour à partir d'un ensemble de segments sera plus adéquat que si nous devons nous limiter à une droite pour le décrire.

Cette transformée améliore donc la prise en compte des singularités d'une image, par contre, elle est conçue de sorte que la transformée est très redondante. Il existe des alternatives pour lesquelles cette redondance est limitée.

Transformée Contourlet Cette transformée proposée par Do *et al.* [30] correspond à une variante de la transformée Curvelet en utilisant à la place de la transformée de Ridgelet un banc de filtres directionnels proposé par Bamberger *et al.* [6] ((b) figure 1.7). Une autre différence avec les Curvelets réside dans l'utilisation de la décimation au fur et à mesure de la montée en échelle lors de l'analyse fréquentielle : le choix effectué aboutit à une représentation du signal correspondant à une pyramide gaussienne de Burt *et al.* [11] ((a) figure 1.7).

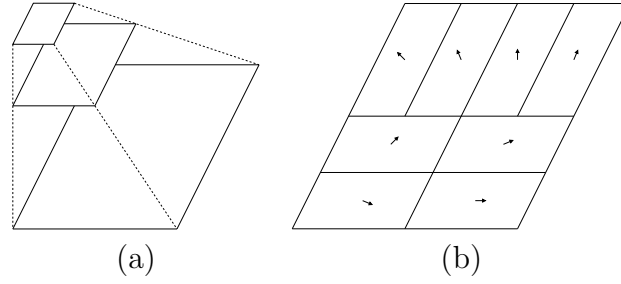


Figure 1.7: (a) Pyramide gaussienne. (b) Traitement des différentes projections par la transformée en Ondelettes.

La redondance de cette transformée est moins importante que pour la transformée Curvelets : pour J échelles associées à la transformée, la redondance est de $1 + \sum_{i=0}^J \frac{1}{4^i} < \frac{4}{3}$ alors que la redondance des Curvelets est de $16J + 1$. Contrairement à la transformée Curvelets qui se place sur des applications de type débruitage, cette transformée se place plus sur des applications de compression (en particulier avec la version CRISP-contourlets [45] qui est à échantillonnage critique).

Il existe également une extension de la transformée pour l'étude des données organisées selon 3 dimensions avec les Surfacelets [46].

Afin de prendre en charge un autre type de données, une transformée relativement ressemblante à la transformée Ridgelet a été proposée : la transformée Beamlet.

Transformée Beamlet À travers la transformée Beamlet, Huo et Donoho [31] proposent une classe d'identification des segments "beams" de l'image : l'ensemble des "beams" correspond à tous les segments possibles partant de deux pixels de l'image traitée (soit n^2 pour une image à n pixels). Les "beamlets" ((a) figure 1.8) correspondent à une limitation de l'ensemble des "beams" par le biais d'une segmentation dyadique de l'image à plusieurs échelles ((b) figure 1.8). Le principe est de ne choisir que les "beams" dont les extrémités appartiennent à la limite d'une des zones dyadiques. Afin de limiter encore plus le nombre de "beams", il propose également de quantifier les sites possibles sur les frontières de zone : la frontière d'une zone correspondant à, par exemple, 32 pixels, peut être limitée à 8 d'entre eux également répartis sur le contour.

Les coefficients de la transformée Beamlet correspondent à l'intégration des valeurs des pixels le long du segment. Cette transformée permet également la mise en valeur des ruptures linéaires dans l'image à partir d'une analyse multi-échelle.

Nous présentons une dernière transformée en ondelettes que nous pouvons considérer entre une transformée adaptative et une transformée à bases fixes : il n'y a pas à proprement parler d'identification préliminaire des singularités et pourtant le dictionnaire d'analyse s'adapte aux caractéristiques de l'image.

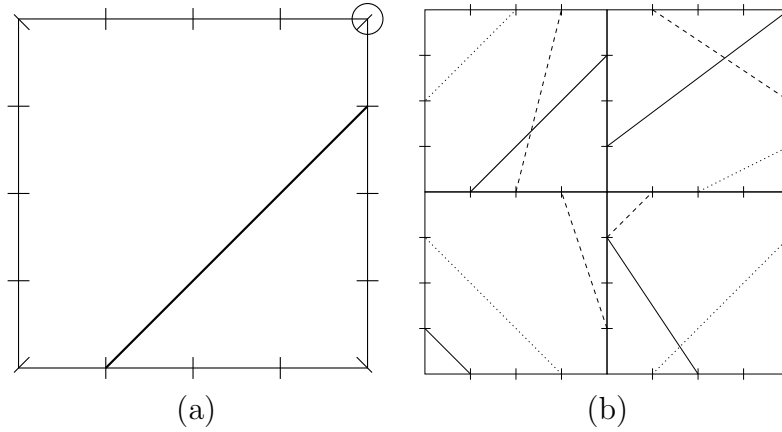


Figure 1.8: (a) La beamlet est codé par deux sites du contour que l'on peut indexer dans le sens horaire en partant du coin nord-est. (b) Un ensemble de quelques beamlets.

Ondelettes - Triangulation La transformée [39] est basée sur la triangulation d'une image niveau de gris considérée pour le coup comme une surface dans un espace à trois dimensions.

L'information décrivant le dictionnaire de fonctions d'analyse de la transformée réside dans la topologie de l'ensemble d'échantillons qui est mise en valeur par la triangulation. L'avantage de cette nouvelle formulation est que la triangulation permet à la transformée de s'adapter aux singularités de la surface : nous avons par exemple une plus grande concentration de triangles pour les parties plus riches en détails de la surface ((e) figure 1.9).

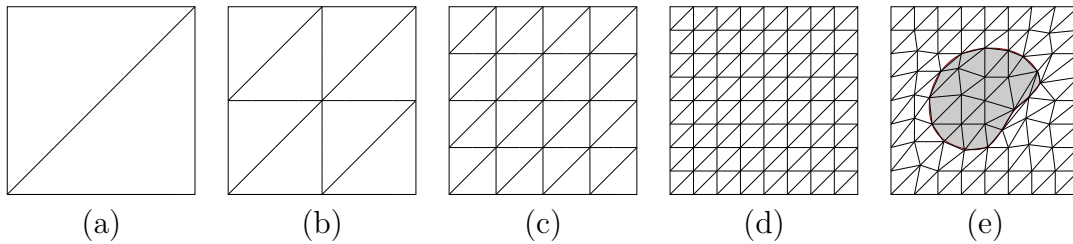


Figure 1.9: Triangulation du signal. (a), (b), (c), (d) Construction progressive (multi-échelle) d'une zone uniforme. (e) Triangulation pour un signal régulier par morceaux.

Cette approche très particulière de la transformée en ondelettes part de l'échelle la plus grossière pour redescendre vers les coefficients de détails. Elle s'appuie sur un schéma de subdivision de la triangulation de base, soit deux triangles construits à partir des coins de l'image ((a) figure 1.9). Chaque arête de chaque triangle est subdivisée par l'ajout d'un sommet ((b), (c), (d) figure 1.9). Le coefficient d'ondelette résultant de cette subdivision correspond à la distance entre le milieu de l'arête et le sommet réel qui lui correspond dans

la surface étudiée. Afin de permettre une plus grande concentration de l'énergie, le sommet de la surface qui est choisi correspond à la projection dans la direction perpendiculaire à l'arête (cela correspond au "normal mesh scheme").

Cette transformée peut se voir comme une transition vers les transformées en ondelettes adaptatives parce qu'elle s'adapte aux données du signal (ce que les auteurs soulignent) mais, pour autant, ce n'est pas une transformée adaptative. En effet, l'adaptation de la transformation aux données de l'image se fait à travers les coefficients d'ondelettes et non à partir d'un ensemble de paramètres préalablement définis pour former le dictionnaire des fonctions d'analyse et de synthèse.

Nous proposons maintenant la description de plusieurs transformées en ondelettes adaptatives : type des transformées que nous avons étudiées durant la thèse.

1.1.2 Transformées adaptatives

Ces transformées comme nous l'avons fait remarquer dans le paragraphe sur la transformée par triangulation, s'appuie sur un ensemble de paramètres permettant la construction du dictionnaire de fonctions d'analyse et de synthèse. Elles se retrouvent par conséquent systématiquement accompagnées d'une ou plusieurs méthodes destinées à construire l'ensemble de ces paramètres.

Nous allons voir à travers les exemples de transformées présentées, quelle forme peut prendre cette association d'une construction de l'ensemble des paramètres et d'utilisation de cet ensemble à partir de la transformée en ondelettes.

Nous allons débiter par la transformée Wedgelet dont le but est l'analyse de fonctions constantes par morceaux.

Transformée Wedgelet Les wedgelets [33] correspondent à la famille de représentation des fonctions constantes par morceaux ("Horizon Class of functions"). La première phase de la transformation correspond à l'identification des "morceaux" de fonctions. Cette procédure itérative s'appuie sur un quadtree. On cherche dans chaque feuille du quadtree une rupture *edgel* coupant la feuille en deux morceaux de fonctions constantes. Si il y a plus de deux morceaux, on sépare dyadiquement la feuille et on continue la récursion. Si la feuille ne contient qu'un morceau, on arrête pour cette feuille et on indique une absence d'arêtes : cela constitue la condition d'arrêt de la récursion (en plus d'un contrôle de la profondeur maximum du quadtree). Si la feuille contient une singularité suffisamment simple de forme pour être décrite par un *edgel*, on arrête également la récursion avec codage de l'*edgel* pour l'échelle en cours. Ce comportement de la transformée s'obtient de manière plus globale en cherchant à minimiser la différence entre l'ensemble des données traité et sa projection sur l'ensemble des *edgels*. Nous obtenons donc l'ensemble quadtree plus *edgels* ((a) figure 1.10) formant le dictionnaire sur lequel s'appuie les wedgelets pour construire la transformée. Après la constitution de ce dictionnaire les coefficients de wedgelets permettent de définir la valeur de chaque morceau constant pour obtenir la transformée wedgelet ((b) figure 1.10).

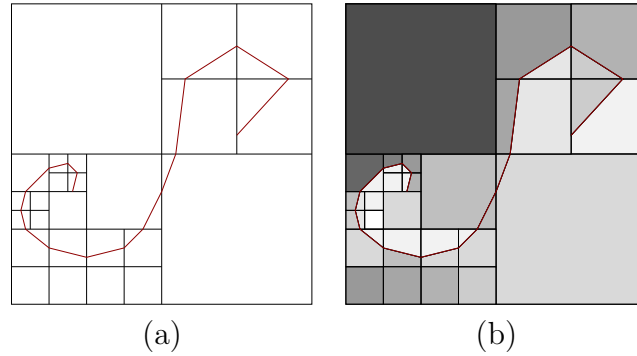


Figure 1.10: (a) Dictionnaire d'*edgels* trouvé pour l'image en cours. (b) Transformée wedgelets : zones uniformes mises en évidence.

Cette transformée adaptative est particulière puisqu'elle est conçue pour les simples fonctions constantes par morceaux. Néanmoins, en combinaison avec la transformée en ondelettes 2D elle permet une amélioration de la compression des images réelles [68] (stratégie de prise en charge séparée des textures et des zones uniformes de l'image).

La transformée Wedgelet illustre bien le principe des transformées adaptatives : en construisant un dictionnaire (un ensemble de paramètres dépendant de l'image traitée) nous pouvons adapter au mieux les fonctions d'analyse à notre signal.

Il existe une évolution aux Wedgelets : la transformée Surflet. Elle s'applique aux données organisées selon trois dimensions [15] et/ou permet la définition de singularités plus complexes comme des polynômes d'ordre n (attention : l'ordre s'accompagne d'un coût de codage plus important).

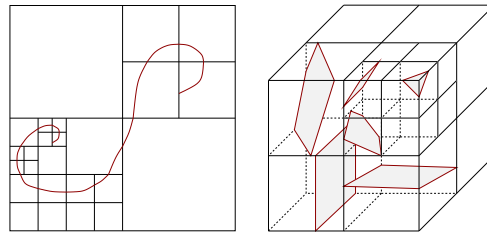


Figure 1.11: (a) Stratégie avec ordre du polynôme décrivant la singularité supérieure à 1. (b) Stratégie 3D avec octree.

Dans un autre registre, plutôt que de traiter séparément zones uniformes et textures, des approches proposent de modifier la transformée pour que le filtre d'analyse (et de synthèse) s'adapte aux singularités de l'image. Nous allons dans un premier temps voir des transformées qui font le choix de déformer le signal pour l'adapter à la transformée en ondelettes 2D.

Transformée Bandelette première génération Nous étudierons les bandelettes de première génération [43], [42] s'appuyant sur une description des contours ((a) figure 1.12) de l'image pour en identifier, ou plutôt localiser, les singularités. Ces contours sont en premier lieu triés selon deux catégories : majoritairement verticaux ou majoritairement horizontaux. Contrairement aux transformées présentées jusque là, plutôt que d'adapter les fonctions d'analyse aux singularités de l'image, la transformée adapte des zones de l'image à la transformée en ondelettes séparables 2D (à quelques adaptations près pour permettre la prise en compte de la forme non rectangulaire des zones). Afin de construire ces zones à partir des contours détectés dans l'image, l'algorithme de Grassfire proposé par Blum H. [9] ((b) figure 1.12) est utilisé. Ensuite, toujours à partir de l'information des contours, des déformations sont associées à chaque zone pour permettre son adaptation aux familles d'ondelettes séparables 2D ((c) figure 1.12). Après la prise en compte des pixels des zones déformées (correspondant aux coefficients de bandelettes) il reste un ensemble de pixels à coder. Ces pixels sont pris en charge avec l'estimation de l'image initiale uniquement à partir des coefficients de bandelettes. La reconstruction parfaite est assurée par le codage du résidu entre image initiale et image estimée.

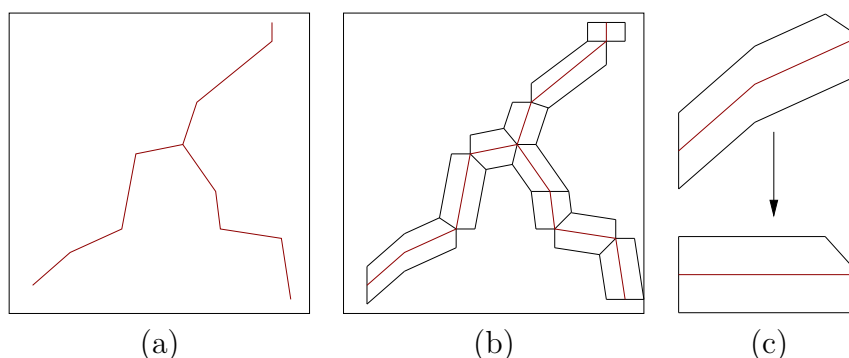


Figure 1.12: (a) Détection des contours. (b) Construction des zones des pixels "bandelettes" par grassfire. (c) Déformation de la zone.

Malgré l'utilisation du Grassfire, la transformée souffre d'une légère redondance qui ne l'empêche pas d'obtenir de bons résultats en compression (notamment grâce à la concentration de l'énergie obtenue par les coefficients de bandelettes). Afin de rester sur une approche de déformation par zones du signal, et toujours à partir de la prise en compte des contours de l'image, une deuxième génération de transformée en Bandelettes a été proposée.

Transformée bandelettes deuxième génération La transformée en Bandelettes de seconde génération [53] s'appuie sur une segmentation par quadtree ((a) figure 1.13) des différentes bandes de fréquences de la transformée en ondelettes un peu à la manière de la transformée en Wedgelets. Les singularités détectées dans chaque feuille du quadtree sont prises en charge par le réordonnancement préalable des coefficients, puis la transformation

par ondelettes du signal 1D obtenu. Le passage de (b) vers (c) de la figure 1.13 illustre la déformation puis le parcours adapté des coefficients de la zone. Le réordonnancement s'appuie sur les lignes de flux parallèles à la singularité détectée dans la feuille dont la forme peut être plus ou moins complexe. Ce réordonnancement s'inspire de la transformée de Alpert [1].

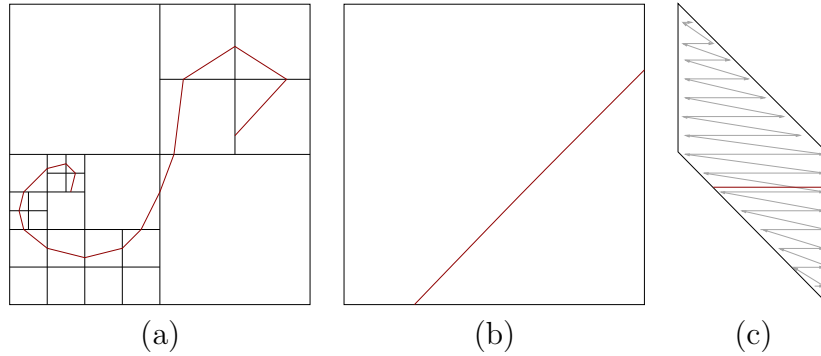


Figure 1.13: Bandelettes 2G. (a) Description des singularités dans le domaines des coefficients d'ondelettes séparables. (b) Choix d'une feuille à traiter. (c) Déformation, puis réordonnancement.

Cette fois, le nombre de coefficients de transformée correspond exactement au nombre d'échantillons du signal étudié. La concentration de l'énergie plus importante que pour la transformée en ondelettes permet encore une fois d'améliorer les résultats de compression. Il existe également une autre transformée adaptative utilisant la déformation du signal. Sa particularité par rapport aux deux transformées que nous venons de voir est qu'elle ne s'appuie pas du tout sur une segmentation.

Ondelettes - Champ de déformation Le Guen *et al.* [41], [40] s'appuient quant à eux sur une déformation de l'image à partir d'un maillage quadrangulaire (figure 1.14 (a)). Le but de cette déformation est, dans la même philosophie que pour les bandelettes, d'adapter l'image à la transformée en ondelettes 2D séparables. Cette approche de l'adaptation de la transformation par déformation préalable de l'image à un avantage par rapport aux transformées bandelettes : il n'y a pas de segmentation à gérer donc il y a beaucoup moins de problèmes de superposition du support des fonctions d'analyse avec un bord.

Le choix des paramètres caractéristiques du maillage quadrangulaire (paramètres qui peuvent être assimilés aux paramètres du dictionnaire de fonctions d'analyse de la transformée adaptative) s'appuie sur une estimation du coût de description de l'image après déformation ((b) figure 1.14). Un algorithme itératif propose des champs jusqu'à obtention de celui qui minimisera une métrique liée aux résultats de compression que l'on obtiendra avec la transformée 2D séparable sur l'image déformée.

Nous avons donc vu trois propositions sur la déformation préalable réversible du signal afin d'obtenir un signal fictif plus adapté à la transformée en ondelettes séparables 2D.

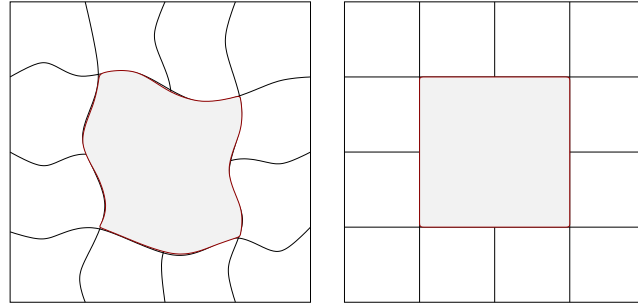


Figure 1.14: Champ de déformation. (a) Maillage quadrangulaire adapté aux caractéristiques de l'image. (b) Rectification du maillage quadrangulaire synonyme d'une déformation adaptée de l'image.

Nous allons maintenant citer des propositions s'appuyant sur des champs permettant de diriger la convolution et ainsi déformer l'opérateur plutôt que le signal.

Transformée grouplets Avec cette transformée, Mallat S. [48] propose d'utiliser un champ d'association afin de prendre en compte les singularités de l'image. Le signal est segmenté en échantillons pairs et impairs suivant la direction de la transformée (figure 1.15 correspond à la direction horizontale). La construction du champ d'association consiste à choisir pour chaque élément pair, un élément impair (choix restreint à un voisinage donné de l'élément pair) minimisant une mesure associée à l'association. Dans la pratique cela revient par exemple à choisir l'élément impair le moins éloigné de l'élément pair selon la norme L_2 . Ces champs d'association permettront tout au long de la transformation, de diriger les calculs selon les directions de "régularité".

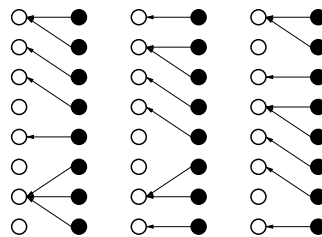


Figure 1.15: Champ associant chaque élément impair à un élément pair en minimisant un critère.

Une évolution de cette transformée [54] permet également de prendre en charge des champs d'association plus complexes tels que des champs de vecteurs associés à une analyse du flux géométrique de l'image. L'intérêt de cette variante est notamment de prendre en charge les cycles dans le champ obtenu. L'application visée est la génération de texture directionnelle de par la séparation entre le flux (que l'on pourrait appeler macromotif)

correspondant à la texture et le motif plus local pris en charge par les grouplets. Cela permet ainsi de construire des textures en changeant le macromotif sans changer le contenu de la texture.

Les transformées géométriques adaptatives présentées jusque là adaptent les données du signal afin de permettre au final une application de la transformée en ondelettes selon le formalisme des bancs de filtres. Une autre approche exploite les libertés qu'offrent les ondelettes dites de seconde génération (*i.e.* le lifting scheme [24]) afin de permettre des réécritures plus simples de transformées définies en se limitant aux outils des bancs de filtres. Les premiers exemples de transformées ondelettes adaptatives que nous proposons proviennent des ondelettes orientées. Mais avant cela nous proposons d'introduire la base de la construction d'une transformée en ondelettes à partir de schéma de lifting.

Lifting Scheme Le lifting scheme [24], [61], [60], comme son nom l'indique, correspond à un *schéma* de calcul permettant la traduction de la projection du signal sur les fonctions d'ondelettes et d'échelles (ondelettes et échelles sont prises en charge conjointement par le schéma) correspondant à un enchaînement d'étapes de calculs simples. L'augmentation de la régularité des fonctions d'ondelettes et d'échelles est liée au nombre d'étapes dont le schéma se compose.

La première différence notable avec la transformée en ondelettes réside dans la séparation préalable des coefficients pairs et impairs du signal. Cette étape est appelée application de l'ondelette paresseuse. Elle est appelée ainsi car elle est équivalente à la montée en échelle d'une transformée en ondelettes qui aurait pour seule fonction de déterminer dans quelle bande de fréquence envoyer les échantillons pairs et impairs.

Une fois cette séparation effectuée, une succession d'étapes de calculs relativement simples appelées prédiction et mise à jour sont appliquées aux coefficients pairs puis impairs. Finalement un coefficient de normalisation est appliqué aux coefficients pairs, puis son inverse aux coefficients impairs afin d'obtenir les coefficients d'échelles et d'ondelettes souhaités. La figure 1.16 représente l'ensemble de ce schéma.

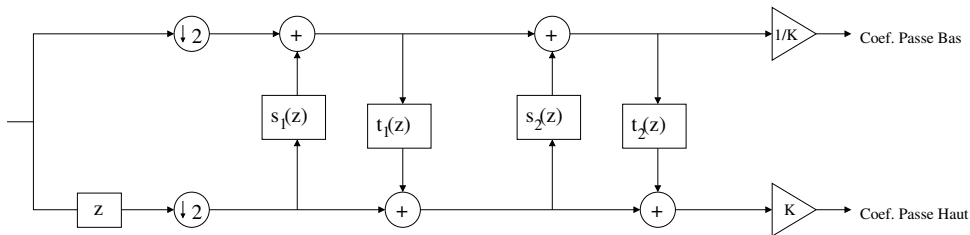


Figure 1.16: Représentation d'un schéma de lifting commençant par l'application de l'ondelette paresseuse, puis quatre étapes de lifting (dans notre cas prédiction, mise à jour, prédiction, mise à jour).

Cette transformée apporte plusieurs améliorations par rapport à la transformée en ondelettes :

- Le calcul étant décomposé en étapes simples, cette transformée offre plus de liberté pour l’adaptation à des problèmes géométriques.
- Le calcul peut-être effectué directement sur les données initiales : il n’y a pas de copie temporaire de données car on ne modifie pas les coefficients impairs lorsque l’on effectue la prédiction de coefficients pairs et inversement (lors de la mise à jour des coefficients impairs).
- Décomposer le calcul en étapes permet de diminuer le nombre d’opérations : c’est un peu comme si nous transposions l’intérêt d’une convolution par filtre séparable en nD sur un filtre 1D.
- La conception du schéma de lifting permettant l’inversion de la transformée est très simple puisqu’il suffit d’inverser l’ordre de l’application des différentes étapes en changeant également le signe des opérateurs de prédiction et de mise à jour (voir figure 1.17).

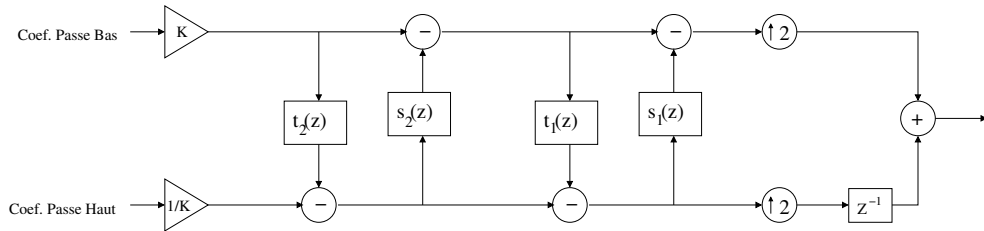


Figure 1.17: Représentation d’un schéma de lifting correspondant à la transformée inverse de la transformée illustrée dans la figure 1.16.

Nous voyons que pour les transformées en ondelettes géométriques, la transformée par schéma de lifting présente des avantages par rapport à la transformée en ondelettes classique. Nous allons donc décrire les transformées en ondelettes orientées, illustrations de l’utilisation du lifting scheme dans une transformée géométrique adaptative.

Ondelettes orientées Ces transformées exploitent les orientations plus ou moins locales que l’on peut identifier dans l’image, suivant que la détection des orientations se fait pour une zone dyadique de l’image, ou pour un élément précis. La transformée proposée par Ding *et al.* [28] recherche par exemple les directions par zones dyadiques. Une fois cette direction déterminée, le calcul de prédiction dans le lifting qui suit s’adapte à la direction (la prédiction d’un échantillon donné sera fonction de la zone à laquelle il appartient) par le choix des échantillons impliqués dans le calcul (figure 1.18). Une interpolation est proposée afin de permettre une prédiction à partir de coefficients fictifs calculés à partir des coefficients voisins au-dessus et en-dessous de la direction pour obtenir une précision de localisation simulant l’exploitation d’un signal de fréquence spatiale d’échantillonnage 4 fois supérieure.

Une variante de Chang *et al.* [16], propose deux améliorations. En premier lieu, afin d’adapter au mieux la taille des champs de directions à la taille des motifs dans le signal, la

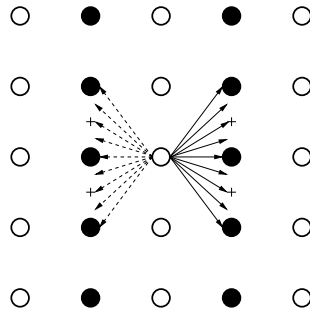


Figure 1.18: Directions exploitées sur maillage séparé en pair-impair.

segmentation dyadique est remplacée par un quadtree. Ensuite, afin d'éviter de privilégier les directions horizontale et verticale, la décimation associée à la transformée correspond à deux treillis quinconces entrelacés comme illustré par la figure 1.19.

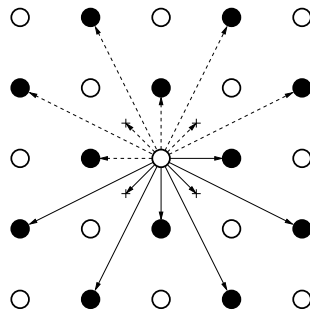


Figure 1.19: Directions exploitées sur treillis quinconces : la recherche de directions se fait pour les deux treillis.

Enfin une version de transformée orientée toujours basée sur un treillis correspond à celle proposée par Chapellier V. *et al.* [18]. Elle diffère des deux transformées précédentes par le nombre de directions prises en charge, à savoir deux directions : horizontale ou verticale. Cette limitation s'accompagne d'une plus grande précision au niveau spatial : ils ne définissent pas seulement une direction par zone dyadique mais une direction par élément (figure 1.20). L'économie du coût de codage des directions permet d'en coder un plus grand nombre. Cette version a aussi l'avantage de ne pas nécessiter d'interpolation. Enfin, ils s'appuient sur le champ de direction détecté pour calculer les étapes de prédiction et de mise à jour (ils ne recalculent pas un champ de directions pour l'étape de mise à jour).

Ces champs de directions sont comparables au banc de filtre directionnel de Bamberger *et al.* [6] dans l'objectif. Par contre, du fait de l'adaptativité, nous pouvons répartir au mieux les coefficients selon la distribution des directions à mettre en valeur dans le signal.

Enfin nous allons présenter une version de transformée en ondelettes adaptative permettant une analyse pour des données non régulièrement échantillonnées.

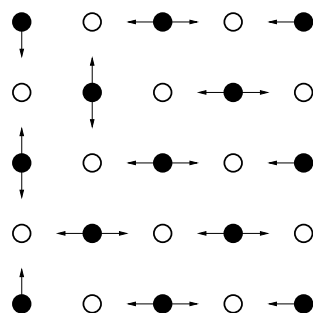


Figure 1.20: Directions exploitées sur treillis quinconces : l'information de direction pour la prédiction est directement exploitée pour la mise à jour.

Ondelettes - Appariement Une alternative intéressante en terme de lifting a été proposée par Choi et Baraniuk [19] sous le nom de représentation et modélisation multi-échelle des variétés. L'étape d'application de l'ondelette paresseuse est remplacée par une étape qui est loin d'être assimilable à un traitement "paresseux" : il faut effectuer un appariement ((a) figure 1.21) des éléments du signal traité en s'assurant que l'appariement choisi maximise la correspondance entre les éléments appariés (comme par exemple la minimisation de la somme des distances euclidiennes entre éléments appariés).

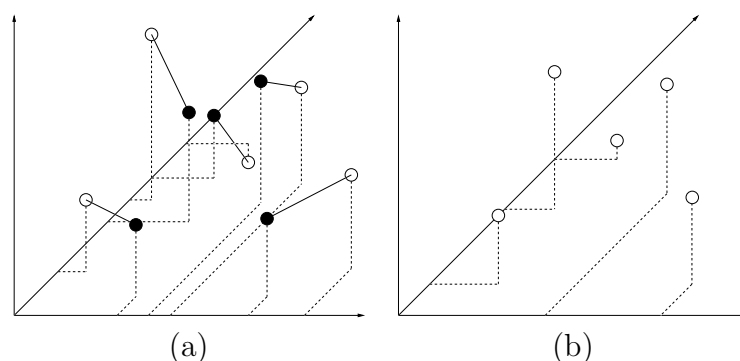


Figure 1.21: Ondelettes par appariement. (a) Association la moins coûteuse possible des éléments traités. (b) Échelle suivante avec codage à part des détails.

Cet appariement est intéressant pour deux raisons :

- les données que l'on souhaite traiter ne sont plus échantillonnées régulièrement (on étudie un nuage de points de dimension n).
- la minimisation associée à l'appariement garantit la conservation de la forme globale du nuage de points.

De par l'organisation du nuage de points, il n'y a plus de distinction, pour l'échantillon traité, entre sa valeur et ses coordonnées, pas plus qu'il n'y a d'ordre établi pour le parcours des éléments. De fait cette méthode est bien adaptée à ce genre de données

parce que l'appariement permet de déterminer quels éléments seront associés dans le schéma de lifting. De plus, cet appariement contraint par une minimisation, permet au fur et à mesure de la montée en échelle ((b) figure 1.21), de conserver au mieux la forme globale du nuage de points. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle l'auteur revendique une modélisation multi-échelle de la variété qui est décrite par les données en cours de traitement.

Nous proposons maintenant un petit récapitulatif des transformées que nous venons de présenter.

1.1.3 Résumé

Afin de fournir une vue globale de ces transformées nous proposons un tableau récapitulatif de toutes les transformées que nous venons de présenter avec un descriptif sur la particularité de chacune d'entre elles.

Nom	Nature des singularités	Paramètres du dictionnaire	Traitements associés
Fixes			
Ridgelets	droites	Aucun	Radon.
Curvelets	segments	Aucun	Banc de filtres (fonctions gaussiennes) - Segmentation dyadiques - Ridgelets.
Contourlets	directions privilégiés	Aucun	Pyramide de gaussienne - Banc de filtres directionnels.
Beamlets	Beams	Aucun	Segmentation dyadique de l'image - Interpolation associée à l'intégration des beamlets.
Ondelettes - Triangulation	Triangle	Aucune	Triangulation - Normal Mesh Scheme.
Adaptatives			
Wedgelets	Edgels	Dictionnaire d'edgels	Construction du dictionnaire d'edgels avec segmentation quadtree.
Bandelettes 1G	Contours	Codage des contours	Détection des contours - Grassfire - Déformation des zones avec interpolation - Estimation des zones non associées à un contour
Bandelettes 2G	Contours dans quadtree	Codage des contours et quadtree	Segmentation quadtree des différentes bandes de fréquences ondelettes - Détection de la singularité dans chaque feuille - Réordonnancement des coefficients (Alpert).
Ondelettes - Champ de déformation	Champ de déformation	Codage du champ	Application du champ - Estimation du coût - Modification du champ - Itération des étapes jusqu'à minimisation du coût.
Grouplets	Champ d'association	Codage du champ d'association	Estimation du champ d'association.
Ondelettes directionnelles	Champ de directions	Codage du champ	Estimation du champ de direction.
Ondelettes - Appariement	Appariement	Codage de l'appariement	Construction de l'appariement minimisant un critère.

Table 1.1: Récapitulatif des transformées présentées.

1.2 Problématique de la thèse

Nous constatons à travers l'ensemble de ces transformées que les évolutions de ces dernières années ont eu pour but la prise en compte de la géométrie afin de dépasser la structure figée correspondant à la version séparable de la transformée en ondelettes. Cela nécessite, soit une description préalable des singularités du signal (transformée à fonctions de bases fixes), soit une description explicite des singularités que l'on souhaite mettre en valeur dans le signal (transformées adaptatives).

Le choix d'une transformée correspond à des compromis que l'on doit fixer en général en fonction de l'application visée. La transformée Curvelet est par exemple une transformée qui ne se prêtera pas à des applications de compression, du fait de sa redondance. En revanche, cette même redondance lui permet d'obtenir de très bons résultats dans des applications de débruitage. À l'inverse, la plupart des transformées en ondelettes adaptatives sont liées à des applications de compression. Ces ondelettes permettent une meilleure concentration de l'énergie et avec peu de coefficients conservés, la synthèse présente de meilleurs résultats visuels.

Dans le cadre de cette thèse, les applications souhaitées sont le débruitage et la suppression de l'effet de blocs dû à la compression JPEG. L'efficacité de ces deux applications n'étant pas sensible au coût du codage des paramètres des fonctions de base de la transformée, l'objectif se situe donc dans la description la plus fidèle possible de la singularité à laquelle on veut adapter nos fonctions d'analyse. Notre approche des ondelettes adaptatives est alors relativement originale puisque les applications visées sont un peu de philosophie opposée à la compression qui est en général l'application visée par les ondelettes adaptatives (échantillonnage critique pour les applications de compression, redondance importante pour les transformées invariantes par translation mieux adaptées à nos applications). Nous présenterons donc, contrairement à ce qui se fait généralement, des transformées géométriques adaptatives dans lesquelles nous ne nous attacherons pas à obtenir un dictionnaire avec un faible coût de codage.

Nous avons de même porté une attention particulière à la généralisation de la transformée à des schémas dits non décimés. Puisque le coût de codage n'est pas dans nos objectifs, nous pouvons nous éloigner de l'échantillonnage critique. Cette approche est en fait motivée par les résultats obtenus lors de l'utilisation de la transformée en ondelettes non décimée pour les applications de débruitage.

Dans ce cadre nous avons étudié deux transformées adaptatives à la philosophie relativement éloignée. La première étudiée, la transformée en Bandelettes de première génération, correspond à une transformée existante dont nous avons redéfini le processus en vue de la prise en compte des aspects numériques du problème. Cette première transformée correspond à l'idée d'adapter l'ordonnancement des échantillons à la transformée en ondelettes. La deuxième transformée que nous proposons correspond, au contraire, à l'utilisation des ondelettes de seconde génération qui nous libère de certaines contraintes "géométriques" concernant la mise en oeuvre du calcul. Celle-ci correspond à une proposition dont l'originalité réside dans le type d'information sur lequel nous nous appuyons

pour construire le dictionnaire des fonctions d'analyse et de synthèse de la transformée, à savoir la distance géodésique.

1.2.1 Transformée en Bandelettes de première génération

Dans le chapitre 2, nous allons présenter une transformée géométrique adaptative de première génération (transformée qui n'est pas définie à l'origine à partir d'un formalisme de lifting scheme) à l'occasion de la description de la transformée en Bandelettes de Le Pennec. L'analyse des Bandelettes de première génération nous a amené à faire les choix suivants :

- Transposer la transformée directement dans le domaine discret ;
- Adapter au mieux la transformée pour les applications de débruitage et de suppression d'effets de blocs.

Le premier objectif provient du fait que la transformée est actuellement essentiellement définie dans le domaine continu. Il est donc nécessaire d'interpréter certaines étapes de la transformée selon la vision que nous pouvons avoir du problème (chapitre 2).

Afin de remplir au mieux le deuxième objectif, nous avons également proposé une variante de la transformée, inspirée de la transformée en ondelettes non décimée.

1.2.2 Transformée géodésique

Dans le chapitre 3, nous proposerons une transformée géométrique adaptative de deuxième génération. Cette transformée que nous appelons transformée géodésique s'appuie sur les distances géodésiques de l'image pour définir le dictionnaire des fonctions d'analyse et de synthèse de la transformée.

Nous définirons donc ce que nous entendons par calcul des distances géodésiques de l'image en commençant par son contexte : les variétés. L'objectif de ces méthodes est un peu similaire à celui de la transformée adaptative de Choi et al. [19] s'appuyant sur l'appariement des échantillons.

Chapitre 2

Transformée en bandelettes première génération

Dans le chapitre 1, la transformée en bandelettes de première génération [42] a été positionnée dans la catégorie des ondelettes géométriques adaptatives. Nous proposons à présent une nouvelle interprétation de cette transformée avec pour objectif la mise en oeuvre de solutions de restauration de données. Nous ferons durant la définition de cette nouvelle solution, une mise en parallèle avec la proposition initiale. Cette mise en parallèle sera l'occasion de présenter nos choix, notamment le fait que notre proposition est construite directement dans le domaine discret.

2.1 Transformée en bandelettes à redondance faible

La transformée en bandelettes de première génération est une transformée en ondelettes géométriques adaptatives. Elle se décompose comme suit :

- Identification des singularités.
- Détermination par feu de prairie des zones des bandelettes.
- Calcul des coefficients de bandelettes.
- Calcul des coefficients du résidu.

L'identification des singularités et l'adaptation de la transformée à ces singularités, constituent les éléments centraux de l'adaptabilité de la transformée.

En préambule nous pouvons dire qu'une première spécificité de notre définition de la transformée en bandelettes est l'absence d'économie dans la description des données. L'application visée étant la restauration d'images et non la compression, nous n'avons donc pas pour objectif d'obtenir un codage minimisant les données résultantes de chaque étape : en particulier pour le codage des informations concernant les singularités et sur le nombre de coefficients de bandelettes.

La deuxième spécificité est la redéfinition dans le domaine discret des opérations liées à la construction de la transformée. La définition initialement conçue dans le domaine continu associé à un cadre mathématique rigoureux, laisse le champ libre quant à son interprétation en vue d'une implantation dans le domaine discret. C'est cette liberté que nous proposons d'exploiter.

Nous allons débiter la présentation de la transformée par la détection des singularités de l'image (transformée adaptative) qui s'obtient à l'aide d'une localisation, puis d'une mise en forme, des contours de l'image.

2.1.1 Identifications des singularités

Cette première partie correspond à l'identification des singularités de l'image afin d'*adapter* l'ensemble des fonctions de base (ondelettes et échelles) de la transformée à l'image en cours de traitement. Elle se décompose en deux étapes :

- Détection des contours.
- Séparation des contours en fonction de leur orientation.

Identification des pixels de contours

Le choix effectué par Le Pennec dans sa thèse [42] pour la détection des singularités s'appuie sur les directions de régularité qui localement sont définies par Le Pennec comme les vecteurs perpendiculaires au gradient ∇f (f fonction correspondant à l'image niveaux de gris). La détection se confronte à la présence de bruit qu'il propose d'éliminer à partir d'un filtrage gaussien choisi en fonction des caractéristiques du bruit. Ce filtrage est défini afin d'éliminer le bruit de l'image sans pour autant supprimer les singularités de l'image. Une dernière étape construit à partir des maxima du gradient la géométrie des singularités de l'image.

Ayant choisi une approche du problème qui se veut directement formulée dans le domaine discret, nous nous sommes appuyés sur une détection de contours plutôt que sur un formalisme de recherche de directions de régularité. Nous proposons également cette recherche des singularités pour des images couleurs. Pour ce faire nous proposons une prise en charge des contours à partir de l'utilisation de normes de gradient proposées par Di Zenzo [26] comme cela est abordé dans les thèses de Tremblais B. [65] et Tschumperlé D. [66]. Ces travaux proposent la construction d'une norme du gradient qui associe les différentes composantes de l'image afin d'en exploiter la corrélation. L'image est considérée comme une application d'un espace 2D dans un espace à n dimensions (n étant le nombre de composantes des valeurs des échantillons). Nous allons commencer par définir le gradient selon x puis y de notre image couleur $I = (R, V, B)$ définie sur le support Ω .

$$I_x = \frac{\partial I}{\partial x} = \left(\frac{\partial R}{\partial x} \quad \frac{\partial V}{\partial x} \quad \frac{\partial B}{\partial x} \right) \quad (2.1)$$

$$I_y = \frac{\partial I}{\partial y} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} \quad \frac{\partial V}{\partial y} \quad \frac{\partial B}{\partial y} \right) \quad (2.2)$$

Nous allons nous appuyer sur ces gradients pour définir notre gradient sur les images couleurs :

$$\nabla I = \begin{pmatrix} I_x \\ I_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla R & \nabla V & \nabla B \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Définir la norme du gradient revient à maximiser l'expression du gradient selon la direction définie par le vecteur unitaire $w = (u, v)$:

$$wGw^T \quad (2.4)$$

La matrice G à l'origine de cette définition est construite à partir de ∇I ou plutôt à partir de la somme de gradients appliqués séparément aux différentes composantes de I :

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \sum_{c \in I} \nabla c \nabla c^T \quad (2.5)$$

À partir de G nous pouvons définir trois normes basées sur les valeurs propres $\lambda_- = \frac{g_{11}+g_{22}-\delta}{2}$ et $\lambda_+ = \frac{g_{11}+g_{22}+\delta}{2}$ avec $\delta = \sqrt{(g_{11} - g_{22})^2 + 4g_{12}^2}$:

- La norme du gradient : $\sqrt{\lambda_+}$ définissant notre maximum et la norme de gradient de Di Zenzo.
- La norme de cohérence : $\sqrt{\lambda_- - \lambda_+}$ qui ne prend pas en compte les coins dans l'image.
- La norme de variation maximale : $\sqrt{\lambda_+ + \lambda_-}$ qui revient au gradient marginal $\sum_{c \in I} \|\nabla c\|^2$.

Nous avons choisi pour la suite de nos traitements la norme du gradient correspondant à notre maximisation de l'expression (2.4) en utilisant le vecteur propre comme direction w du gradient. Des précisions sur les différentes propriétés de chaque norme sont disponibles dans la thèse de Tschumperlé [66].

Ce formalisme nous offre donc une norme de gradient prenant en compte la couleur. Nous allons voir comment exploiter cette norme ainsi que l'information d'orientation des vecteurs ∇I pour construire notre ensemble de marqueurs de contours. Mais auparavant nous cherchons à transposer un autre élément du traitement proposé par Le Pennec : le débruitage préalable de l'image à traiter afin que les pixels sélectionnés correspondent bien aux contours de l'image. Nous proposons d'utiliser le filtrage par diffusion anisotrope présenté par Tschumperlé *et al.* [25] car dans la poursuite logique de la prise en compte de la couleur tout en respectant au mieux les singularités de l'image, cette méthode offre une alternative très intéressante au filtrage gaussien. En effet le filtrage correspondant à cette variante de la formulation du filtrage par une gaussienne correspond en réalité à un filtrage par diffusion anisotrope qui utilise la localisation et la direction des singularités.

Nous avons utilisé la formulation du lissage de notre image I (de support Ω) par un filtre gaussien formulé à partir d'une minimisation de la variation globale de l'image :

$$\min_{I: \Omega \rightarrow \mathbb{R}} E(I) = \int_{\Omega} \|\nabla I\|^2 d\Omega \quad (2.6)$$

Cette formulation du problème permet la définition de l'évolution de l'image à partir d'une équation aux dérivées partielles (avec div la divergence et Δ le Laplacien) :

$$\frac{dI}{dt} = \Delta I = div(\nabla I) \quad (2.7)$$

L'application de t itérations de ce processus revient à filtrer l'image par une gaussienne d'écart type $\sigma = \sqrt{2t}$ et fait donc apparaître un phénomène de flou. Une alternative non

linéaire est proposée par Perona *et al.* [52] afin de prendre en compte une norme du gradient dans le processus :

$$\frac{dI}{dt} = \text{div}(c(\|\nabla I\|)\nabla I) \quad (2.8)$$

La fonction de diffusion c que nous utilisons correspond à :

$$c(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{\alpha^2}\right)$$

Cette fonction permet, à travers le processus de diffusion, de rehausser les contours tout en lissant les petites discontinuités. La méthode de Perona *et al.* [52] est historiquement la première méthode de filtrage par diffusion anisotrope. Elle est très simple à implanter et rapide à l'usage. Nous l'avons choisie pour ces raisons.

Nous avons donc un ensemble d'outils nous permettant dans un premier temps de supprimer le bruit d'une image couleur tout en respectant les singularités de l'image.

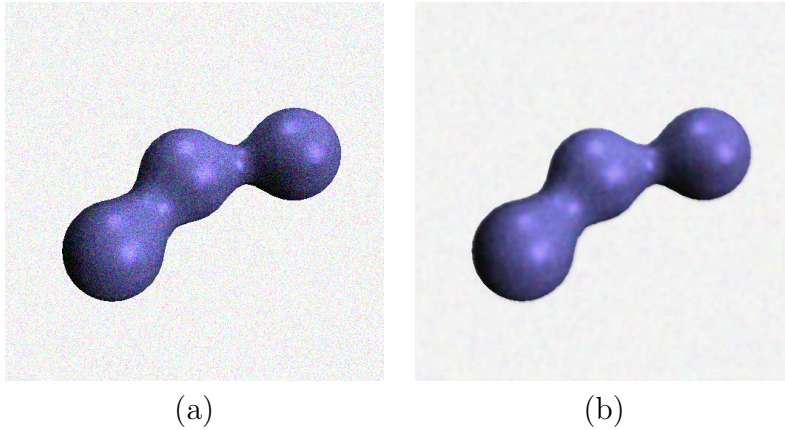


Figure 2.1: Exemple de filtrage par diffusion anisotrope sur une image couleur bruitée par un bruit blanc gaussien d'écart-type 30.

La figure 2.1 nous montre un exemple de suppression du bruit à partir du filtrage par diffusion anisotrope correspondant à l'équation (2.8) pour 10 itérations du processus. Nous avons utilisé $\alpha = 30$ et pour facteur de l'évolution temporelle $dt = 0.05$. Le facteur de l'évolution temporelle définit la précision avec laquelle l'image va évoluer d'une itération à l'autre. Plus il est grand, plus l'évolution vers la solution sera rapide, mais plus les risques de diverger en certains points seront importants (voir [65] pour des précisions sur les paramètres).

Une fois ce filtrage par diffusion anisotrope appliqué, nous construisons la norme de variation maximale et une matrice contenant l'orientation des singularités pour chaque pixel. Nous exploitons ces données pour détecter les pixels de contours à partir d'une détection des maxima locaux du gradient, dans la direction du gradient, suivie d'un seuillage par

hystérésis. Cette méthode se base sur deux seuils et l'utilisation des directions de régularité des singularités. Les directions utilisées correspondent aux vecteurs propres η issus de la décomposition du tenseur de structure (voir [66]). Suivant cette direction, si l'un des deux voisins du pixel étudié possède une norme plus importante, ce pixel est éliminé des possibles pixels de contours. Cela permet d'obtenir les pixels dont la norme est un majorant en prenant en compte la direction des singularités. Ensuite parmi ces pixels, seuls ceux dont la norme est supérieure au seuil haut sont considérés comme pixels de contours. Enfin, parmi les pixels que nous venons d'éliminer (majorant selon la directions de η mais en dessous du seuil), ceux voisins d'un pixel de contours et au dessus du seuil bas seront considérés comme étant des pixels de contours. La dernière étape est répétée pour permettre d'ajouter de proche en proche tous les majorants au-dessus du seuil bas.

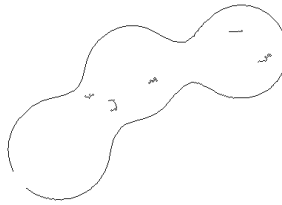


Figure 2.2: Résultat d'une détection de contours, appliquée à l'image Metaballs.

La figure 2.2 correspond à une détection de contours sur l'image initiale figure 2.1 (b), à partir de la norme de variation maximum et la méthode de Canny.

Nous avons donc adapté des méthodes de la littérature afin de définir une alternative dans le domaine discret aux propositions de Le Pennec. L'avantage de ce détecteur de contours est de permettre une régularisation de l'image préservant les contours sur plusieurs échelles, de prendre en compte directement les images couleurs tout en définissant une régularisation sur plusieurs échelles possibles : la notion d'échelle correspond à l'écart-type du filtre gaussien traduit par le filtrage par diffusion anisotrope. Cette suite d'opérations nous permet donc de détecter un ensemble de pixels correspondant à la localisation des contours. Nous allons maintenant présenter une méthode permettant d'obtenir des sous-ensembles compatibles avec les déformations des zones de bandelettes.

Traitement préalable des contours

Nous avons également cherché à adapter, pour cette étape, la proposition initiale de Le Pennec dans le domaine discret : à savoir que nous devons identifier dans nos contours quelles sont les parties qui correspondent à une orientation verticale et celles qui

correspondent à une orientation horizontale. Le but est de séparer ces contours en groupe d'orientation unique que nous pourrons ensuite associer à des déformations. Mais avant de présenter notre proposition nous commençons par préciser les raisons de cette séparation et des types de déformations utilisées.

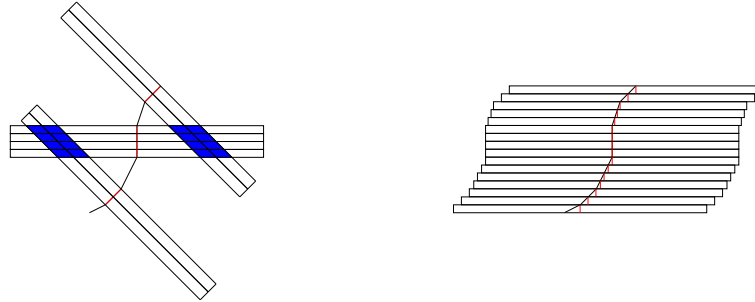


Figure 2.3: Deux possibilités de construction des zones entourant un contour.

Nous voyons dans la figure 2.3 qu'il n'est pas possible d'appliquer des déformations à des zones entourant les pixels de contours sans prendre quelques précautions. Il est indispensable de définir une déformation associée à un contour qui soit uniquement verticale ou horizontale. Le but est de permettre une identification unique d'un pixel de la zone entourant le contour à l'un des pixels du contour. Si nous permettons des déformations autres que horizontale ou verticale comme par exemple diagonale (parmi les directions perpendiculaires à la direction du contour), nous ne pourrions déterminer quelles directions doivent suivre certains pixels de la zone entourant le contour. En effet, ceux qui sont à la verticale d'au-moins deux pixels du contour (pixels des zones bleues) ne peuvent subir deux déformations contradictoires en même temps.

Pour cela nous allons donc effectuer deux traitements :

- La suppression de pixels de contours pour nous assurer de la compatibilité des contours avec des déformations à pas discret horizontales ou verticales.
- La séparation des pixels de contours pour que chaque sous-ensemble de pixels soit compatible avec une déformation soit verticale, soit horizontale.

Nous allons commencer par présenter la suppression des pixels de contours empêchant l'identification d'un contour à l'une ou l'autre des déformations. Dans la proposition de Le Pennec les contours sont assimilés à une fonction continue dont l'orientation de la tangente permet d'étiqueter les parties du contour. Nous avons, dans notre cas, choisi d'utiliser des informations dans le domaine discret, ce qui signifie que nos contours resteront identifiés à partir de la localisation des pixels. Pour cela, nous devons nous assurer que nos pixels marqués comme contours forment un ensemble huit-connexe strict. Pour définir cet ensemble strictement huit-connexe nous utilisons la terminologie proposée par Andrés E. *et al.* [4] : l'image est un signal à deux dimensions donc nos voisins quatre-connexes sont en fait des 1-voisins et les voisins huit-connexes (sans les voisins quatre connexes) sont les 0-voisins.

La huit-connexité est indispensable pour la suite car nous voulons que nos contours soient identifiables à une déformation. La déformation se fait dans la direction dans laquelle s'étend la zone (dans le cas de la zone construite en figure 2.3 schéma de droite, elle est horizontale). Si deux pixels sont alignés dans la direction de déformation, nous serons confrontés au même problème que dans le cas illustré par le schéma de gauche de la figure 2.3. Après déformation, ces contours doivent correspondre à des segments sans qu'il y ait de pixels superposés (dans le domaine continu cela revient à dire que notre fonction de déformation doit être bijective).

Si nos contours ne sont pas huit-connexes strict nous ne pourrions pas les déformer horizontalement ou verticalement pour obtenir des segments.

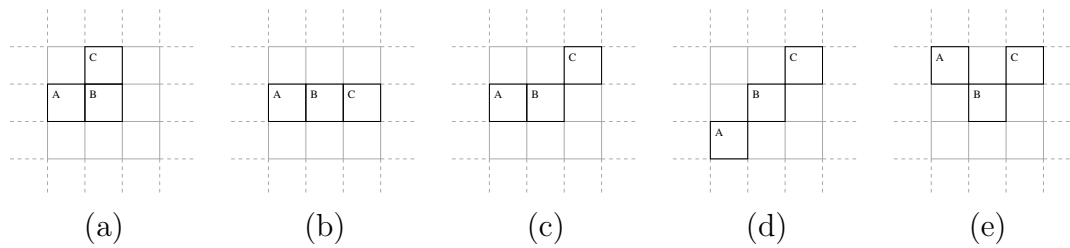


Figure 2.4: Exemples les plus simples de contour 8 connexe à trois pixels. (a) Le contour est non strict. (b) Premier cas de contour strict. (c) Deuxième cas de contour strict. (d) Troisième cas de contour strict. (e) Dernier cas (les autres sont seulement des variantes par symétrie ou rotation).

En effet si nous prenons le cas le plus simple de contour qui n'est pas huit-connexe strict (figure 2.4 schéma (a)) nous constatons qu'aligner les pixels à partir d'un déplacement des pixels soit vertical, soit horizontal ne peut aboutir qu'à une superposition du pixel *B* avec *A* (déplacement horizontal) ou *C* (déplacement vertical). À l'inverse si le contour est huit-connexe strict, nous pourrions aligner les pixels (alignement correspondant au cas (b)) en déplaçant *C* dans le cas (c) *A* et *C* dans les cas (d) et (e). Ces cas très simples illustrent en quoi la stricte huit-connexité est une condition indispensable pour la suite : nous ne pourrions trouver de déformation qui corresponde à une transformation "bijective" à un contour si il n'est pas strictement huit-connexe.

Pour obtenir ces contours strictement huit-connexe nous proposons d'utiliser l'algorithme de squelettisation de Zhang *et al.* [72]. L'intérêt de cet algorithme est sa rapidité et bien entendu le fait qu'il garantisse l'obtention d'un squelette huit-connexe strict (squelette correspondant à notre ensemble de contours). La méthode se base sur la caractérisation des marqueurs de pixels de contour à partir de la configuration de leur voisinage. Un premier passage donne un poids à chaque pixel en fonction de la configuration de son voisinage, puis ces poids sont interprétés pour permettre la suppression des marqueurs qui ne sont pas éléments du squelette. Nous recommençons ces deux étapes jusqu'à ce que le nombre de pixels supprimés soit nul.

Une fois que nous nous sommes assurés que les marqueurs de pixels de contours forment

un ensemble strictement huit-connexe nous pouvons commencer l'identification de ces pixels en fonction de l'orientation correspondant à la configuration de plusieurs d'entre eux. Le principe de l'algorithme que nous proposons est de partir de configurations directement identifiables à un type de déformation. Les premières configurations correspondent à un sous-ensemble de deux pixels 1-voisins entre eux. Si ils sont alignés verticalement, la déformation sera horizontale et inversement.

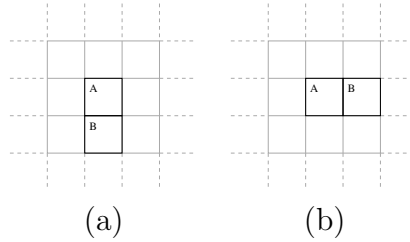


Figure 2.5: Configuration identifiable de sous-ensemble à 2 pixels. (a) Configuration à déformation horizontale. (b) Configuration à déformation verticale.

La figure 2.5 présente les premières configurations (sous ensembles à 2 pixels) nous permettant d'identifier des pixels. La configuration (a) est identifiable à une déformation horizontale et la configuration (b) à une déformation verticale. En l'état, la déformation serait nulle puisque les pixels sont déjà alignés mais, une fois ces pixels identifiés, ils pourront être associés à d'autres pixels de même type de configuration et ainsi construire un contour qui, lui, nécessitera une modification. Nous allons voir le deuxième type de configuration.

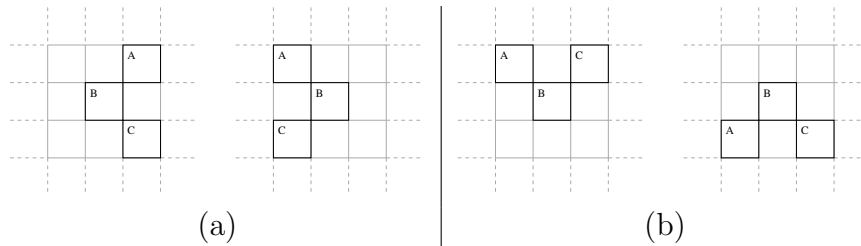


Figure 2.6: Configurations identifiables de sous-ensembles à 3 pixels. (a) Configurations à déformation horizontale. (b) Configurations à déformation verticale.

La figure 2.6 illustre les configurations de sous-ensembles à trois pixels identifiables à des déformations. (a) ne pourra être identifié qu'à une déformation horizontale et (b) qu'à une déformation verticale. La configuration (b) correspond d'ailleurs au schéma (e) de la figure 2.4. L'ensemble des contours que nous pourrions rencontrer dans une image, à partir du moment où est garantie la stricte huit-connexité, sera décomposable à partir des configurations que nous venons de présenter aux figures 2.5 et 2.6 et d'une dernière configuration correspondant à la configuration (c) de la figure 2.4.

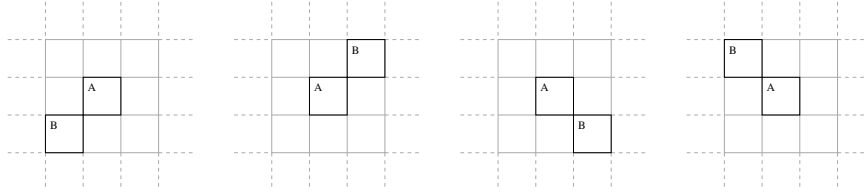


Figure 2.7: Configurations non directement identifiables de sous-ensembles à 2 pixels.

Si nous prenons les configurations de la figure 2.7 nous remarquons effectivement qu'elles ne peuvent être identifiées à l'un ou l'autre des types de déformation. Cela constitue en fait plus une liberté qu'une contrainte : nous allons identifier les pixels formant ces configurations à partir de leurs voisins. Si des pixels formant ce genre de configuration ont des pixels voisins identifiés à un type de déformation, ils seront associés au même type de déformation. Si, à l'inverse, ils sont voisins de pixels non identifiés, nous répétons l'opération jusqu'à détecter un voisin associé à une configuration.

Nous avons donc une méthode pour identifier les pixels à un type donné de déformation. Nous définissons donc notre squelette en contours huit-connexes strict (pas de pixels avec plus de deux voisins) puis nous appliquons notre méthode pour labéliser ces contours en sous-ensembles identifiés à un type d'orientation.

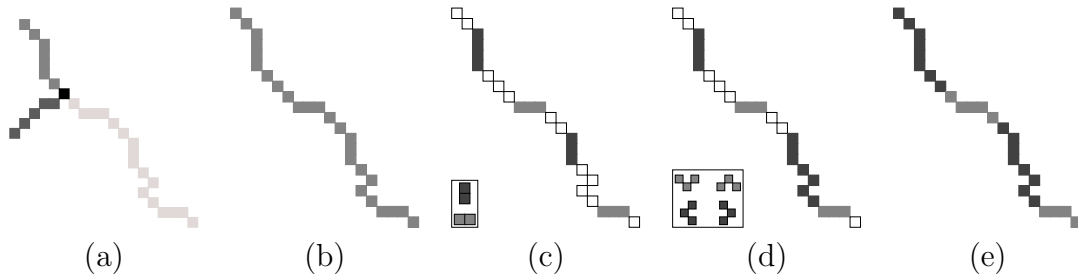


Figure 2.8: Segmentation des contours : (a) L'ensemble de pixels de contours entrecroisés. (b) Une première étape supprimant les croisements. (c) Marquage des pixels de contours formant une configuration à deux pixels correspondant à une orientation verticale ou horizontale. (d) Un deuxième passage utilisant une configuration de marqueurs à trois pixels. (e) Identification du reste des marqueurs par propagation.

La figure 2.8 reprend l'ensemble de ces étapes à travers un exemple relativement simple contenant l'ensemble des types de configuration.

Nous avons à partir de cette étape l'ensemble des contours labélisés qui seront à la base des modifications des fonctions de base de la transformée. Nous allons maintenant passer à la segmentation de l'image à partir de la méthode de feu de paille.

2.1.2 Création des zones de bandelettes par feu de prairie

Cette méthode initialement proposée par Blum H. [9] nous permet de partitionner un espace donné par la propagation simultanée de plusieurs zones, initiées par un ensemble de marqueurs. Les limites de chaque zone sont définies lorsque deux zones se rencontrent lors de leur propagation ou si une zone arrive à la limite du domaine de l'image.

Dans sa version initiale, le feu de prairie s'appuie sur le phénomène de diffusion. En partant d'un ensemble de marqueurs initiaux, cette méthode "consomme" l'ensemble en se propageant à la manière d'un feu de prairie vers l'intérieur de l'ensemble :

$$\frac{d\mathcal{C}}{dt} = \beta\mathcal{N}$$

Dans cette formulation de la propagation \mathcal{C} représente le bord de l'ensemble propagé, \mathcal{N} le vecteur normal intérieur à ce bord (avec β la vitesse de propagation).

Dans le cadre de la segmentation de notre image en fonction de notre ensemble de contours, nous inversons le processus de feu de prairie : nous construisons la forme à partir du squelette et non le squelette à partir de la forme. Nous allons également modifier l'algorithme pour obtenir au final une forme qui soit adaptée au traitement de transformée par ondelettes : à la place d'une diffusion isotrope, nous utiliserons une diffusion horizontale ou verticale suivant que le contour est respectivement identifié à une déformation horizontale ou verticale. Le but est d'obtenir après déformation des zones qui, si elles n'étaient pas contraintes par la diffusion des autres zones de l'image, seraient rectangulaires. En effet, l'algorithme veut que si deux zones différentes se rencontrent, la diffusion à l'endroit de la rencontre s'arrête afin d'éviter le recouvrement des différentes zones (le but de l'algorithme de feu de prairie étant l'identification du lieu de cette rencontre). Notons que cet arrêt de la diffusion sera valable uniquement pour la version à taille critique de la transformée en bandelettes. Dans la version à forte redondance nous utiliserons une diffusion non contrainte (les recouvrements de zones seront dans ce cas pris en charge).

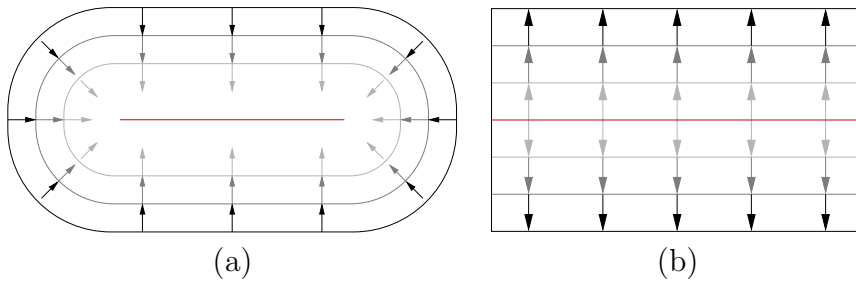


Figure 2.9: (a) Application de la méthode de feu de prairie pour obtenir son squelette. (b) La version de la transformée en bandelettes du feu de prairie pour obtenir une forme rectangulaire.

La figure 2.9 illustre les deux versions de feu de prairie que nous venons de présenter. La première version présentée sur le schéma (a) part d'une forme pour en extraire le squelette et la version que nous utiliserons, illustrée par le schéma (b), part d'un contour

pour former une zone rectangulaire adaptée à la transformée en ondelettes qui va suivre. Le but du feu de prairie, dans le cadre de la transformée en bandelettes de première génération est d'entourer les contours de l'image afin de permettre une transformation des pixels de la zone aussi bien dans le sens du contour que perpendiculairement à ce contour.

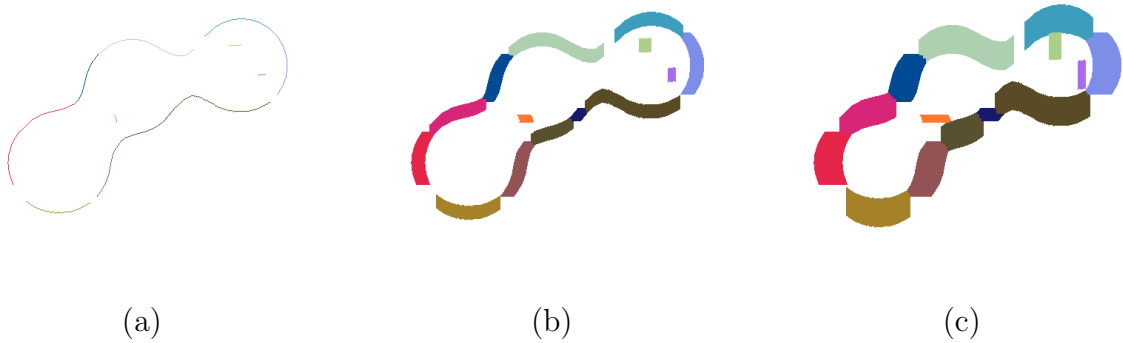


Figure 2.10: Construction des zones de feu de prairie à partir des contours de l'image Metaballs. (a) L'ensemble strictement huit-connexe des contours d'orientation unique. (b) Zones de feu de prairie correspondantes de largeur 19. (c) Zones de feu de prairie de largeur 39.

La figure 2.10 propose une illustration de la propagation des contours à partir d'un ensemble de contours construit pour l'image Metaballs. Nous remarquons que la largeur des zones a une influence sur leur forme : plus la zone est large plus sa forme se définit par les confrontations avec ses voisines. Cela signifie que plus la zone est large, plus sa forme est complexe et donc plus son traitement dans les étapes qui suivent est difficile. Cependant, plus la zone est fine moins nous pourrions monter en échelle lors de l'étape de transformée en ondelettes.

Nous remarquons que la répartition de l'espace classe l'ensemble des pixels selon deux catégories :

- les pixels associés à un contour,
- les pixels associés à aucun contour.

Les pixels qui ne sont associés à aucun contour seront pris en charge lors de l'estimation du résidu détaillée à la section 2.1.5. Quant aux pixels associés aux contours, nous allons voir à présent le traitement qui nous permet d'obtenir les coefficients de bandelettes.

2.1.3 Déformation des zones

Nous allons à présent rechercher les déformations qui nous permettront d'aligner les pixels du contour afin que ceux-ci correspondent après déformation à des segments. Cette

déformation s'appliquera également aux pixels des zones obtenues par feu de prairie accompagnant les contours. Le but de cette déformation étant d'obtenir une configuration d'objets à transformer pour laquelle la transformée en ondelettes séparables sera *a priori* plus efficace.

Nous rappelons que le comportement de l'ondelette séparable motivant la déformation de nos zones est illustrée (au début du chapitre 1) par la concentration de l'énergie en fonction de l'angle que forme un segment. L'énergie restituée après suppression d'un nombre fixe de coefficients d'ondelettes parmi les plus faibles, pour un angle de 45° avec l'horizontale, représente moins de 60 % de l'énergie restituée pour une configuration où le segment a un angle de 0° .

La méthode utilisée pour la déformation, dans le cadre de la transformée en bandelettes de Le Pennec, correspond à une interpolation. Le contour étant défini dans le domaine continu, la déformation qui en découle ne va pas nécessairement produire un déplacement compatible avec la grille discrète de l'image. Cela implique que nous devons estimer la valeur des pixels après déplacement à partir de coordonnées non entières dans l'image de départ.

La méthode d'interpolation (utilisée par Le Pennec) correspond à la méthode de Thevenaz *et al.* [63] basée sur une utilisation de Spline : elle permet un calcul rapide et garantit une perte minimale d'information. Cette perte se situe dans les composantes haute fréquence de l'information du signal. Cette perte n'est pas un problème pour l'application visée initialement par la transformée en bandelettes puisque la compression avec pertes s'attaque en premier lieu aux informations de détail (fréquence spatiale élevée).

Dans notre cas, nous nous appuyons sur une déformation définie directement dans le domaine discret : il n'est donc pas nécessaire d'utiliser d'interpolation puisque le déplacement s'effectue toujours vers une position compatible avec la grille. Cette déformation est d'ailleurs inversible sans perte d'informations.

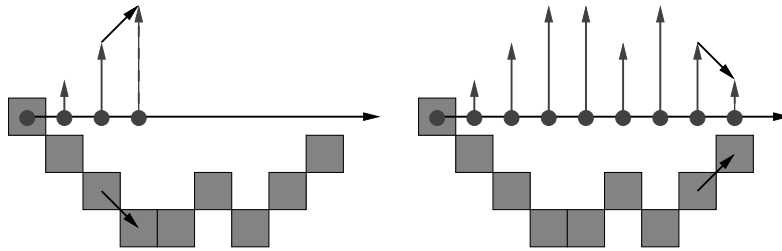


Figure 2.11: Interprétation de proche en proche des codes de Freeman d'un contour horizontal pour définir la déformation globale de la zone.

Comme nous l'avons indiqué précédemment, nous souhaitons que le contour identifié à l'orientation horizontale (respectivement verticale) après déformation corresponde à un segment horizontal (respectivement vertical). Pour cela, nous exploitons directement le codage de Freeman avec lequel nous avons codé les contours. Ce code définit le déplacement effectué lorsque nous passons d'un pixel du contour au suivant. Pour obtenir

la déformation d'un contour identifié à une déformation par exemple horizontale, nous allons utiliser uniquement le déplacement vertical correspondant au code de Freeman. La déformation pour un pixel de contour donné correspondra à la somme des déplacements des pixels précédents depuis le pixel initial du contour. Nous l'illustrons par la figure 2.11.

Une fois l'ensemble des valeurs de la fonction de décalage obtenu, il nous reste à appliquer ce décalage pour tous les pixels de la zone pour obtenir les données que nous souhaitons transformer. Nous allons alors pouvoir appliquer la transformée en ondelettes séparables.

2.1.4 Coefficients de bandelettes

La zone que nous obtenons n'est pas rectangulaire et donc demande quelques adaptations afin de permettre sa transformation en ondelettes séparables 2D. La proposition initiale de Le Pennec s'inspire des travaux de définition de transformée en ondelettes pour des fonctions définies sur des supports finis. Cette approche modifie les fonctions d'ondelettes et d'échelles lorsque le support rencontre la frontière de l'image. La difficulté de ce choix est qu'il impose la prise en charge de l'évolution de la forme complexe des bandes au fur et à mesure de la montée en échelle en lien avec la transformée en ondelettes sur le support. Cette méthode permet de minimiser le nombre de coefficients nécessaires pour la transformée d'une bande. Dans notre cas, nous n'avons pas pour objectif le codage de l'image, nous ne sommes donc pas contraint par le nombre de coefficients produits par la transformée.

Nous proposons dans notre cas, d'utiliser une boîte englobante de la zone qui devient du coup rectangulaire et donc beaucoup plus adaptée aux schémas de transformée en ondelettes. La faiblesse est que nous créons des échantillons pour les parties de la boîte qui sont externes à la zone. Une première approche dans ce cas pourrait être l'assignation d'une valeur constante à chaque élément externe, mais cela crée *a priori* une discontinuité bien plus importante que la singularité que nous cherchons à prendre en charge lors de la construction de la zone. Pour permettre une diminution de l'influence de ces zones externes, nous devons les compléter de sorte que, mise à part la singularité captée par le contour, la boîte obtenue soit la plus régulière possible en terme de contenu. L'intérêt de cette régularité globale est une représentation des zones externes avec des coefficients d'ondelettes à faible coût.

À l'extérieur de la bande nous sommes libres de choisir la valeur des pixels qui ne sera pas prise en compte pour la reconstruction. Par contre, si nous choisissons une méthode naïve en laissant par exemple les zones externes à leur valeur arbitraire, un traitement sur l'ensemble des coefficients d'ondelettes risquerait de faire subir aux pixels de la zone de contour l'influence de cette zone. La figure 2.12 est une illustration du processus que nous allons employer qui s'apparente aux méthodes d'inpainting permettant la reconstruction de zones détériorées dans les images. Les données initiales correspondent aux zones A et B du schéma (a). La zone externe C, englobant les données, est choisie en fonction de l'échelle de la transformée en ondelettes séparables 2D que l'on souhaite appliquer par la

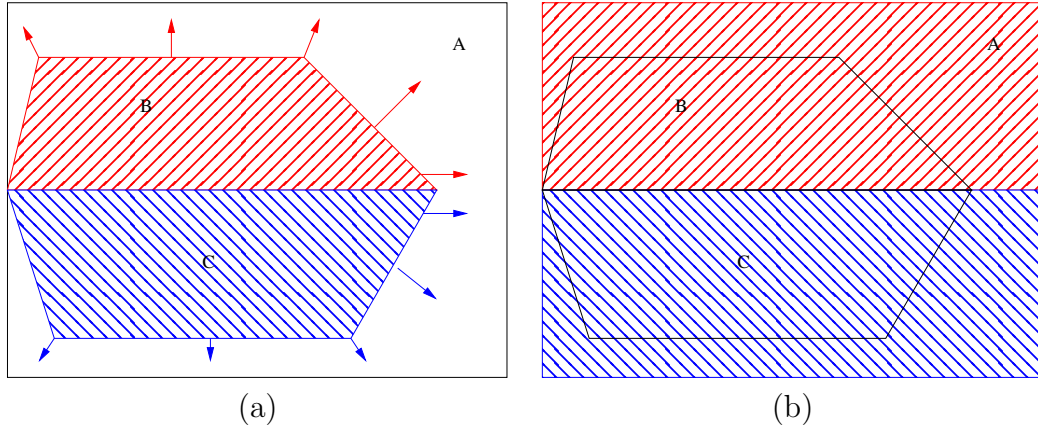


Figure 2.12: Construction de l'ensemble à traiter par la transformée en ondelettes séparables 2D. (a) Données initiales. (b) Données prêtes à être transformées.

suite. Les données seront diffusées des zones A et B dans C comme cela est illustré par le schéma (a) pour obtenir le résultat (b). Le but est d'éviter la diffusion de A dans B ou de B dans A et d'obtenir une répartition de C respectant la singularité rectifiée (frontière entre A et B).

Nous recherchons la valeur des pixels des zones externes afin que globalement ils influencent le moins possible les futurs traitements sur les coefficients d'ondelettes. L'estimation que nous proposons s'inspire de la méthode présentée par Tschumperlé *et al.* [67] permettant une estimation de l'information de certains pixels indéterminés en "propageant" les valeurs des zones contenant de l'information vers les zones n'en contenant pas. Cette méthode exploite les équations aux dérivées partielles que nous avons présentées à la section 2.1.1.

Dans notre cas, nous allons adapter cette méthode en nous basant sur les caractéristiques des données que nous souhaitons estimer. La première caractéristique correspond à l'absence de singularité dans les données : nous n'aurons donc pas besoin d'estimer la géométrie locale de l'image. La deuxième caractéristique correspond au fait que les données à l'extérieur de la zone n'ont pas de sens pour notre signal : la valeur des pixels restaurés sera uniquement fonction de pixels de la zone interne ou de pixels de la zone externe dont la valeur aura été mise à jour par la restauration à l'itération précédente. La dernière caractéristique est liée à la manière dont nous allons envisager les données obtenues avec la transformée en ondelettes séparables : nous allons utiliser une symétrisation plutôt qu'une périodisation de l'ensemble. Les données que nous générons par notre diffusion ne risquent pas de créer une discontinuité à la frontière du support de la boîte englobante puisque nous symétrisons au lieu de périodiser les données de cette boîte.

Nous détaillons les deux étapes de notre algorithme. La première étape (figure 2.13 (b)) consiste à identifier le pixel que nous allons estimer. Pour cela nous identifions tout simplement les plus proches voisins en terme de grille quatre-connexes. Lors de la deuxième

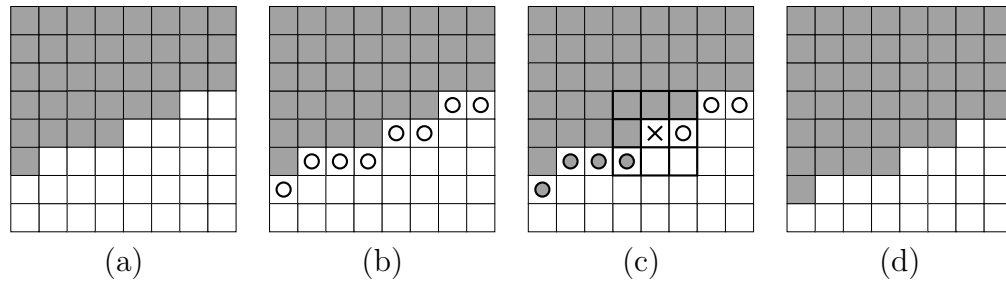


Figure 2.13: Principe de la diffusion rapide de l'information dans des pixels détériorés. (a) Zones d'une "image" à restaurer avec en blanc les pixels intacts ou restaurés et en gris les pixels à restaurer. (b) Identification par \circ des pixels à traiter pour l'étape en cours. (c) Passage de la convolution sur le pixel marqué par \times . (d) Mise à jour des marqueurs.

étape, nous allons estimer la valeur d'un pixel à restaurer à partir de la moyenne des pixels marqués (figure 2.13 (c)).

Cette simple méthode permet une régularisation de l'image en un seul passage (pas de traitement itératif sur l'image dans son ensemble). Par contre, l'image produite n'est pas encore compatible avec une transformée en ondelettes séparable considérant le signal comme périodique. En effet, dans la démarche de la transformée, le but de l'ensemble associé à un contour est de ne contenir qu'une seule singularité correspondant au contour. Si nous appliquons une transformée en ondelettes séparables 2D sur l'image 2.12 (b), nous aurons une frontière aussi marquée au bord de l'image qu'au niveau du contour. Pour remédier à ce problème, nous allons symétriser la zone.

Si nous reprenons le résultat 2.12 (b) et que nous le symétrisons (figure 2.14) nous nous assurons qu'aucune singularité n'émerge au niveau de la frontière lors du traitement périodique de l'ensemble. Nous pouvons donc à partir de tous ces traitements construire l'ensemble des coefficients de bandelettes par l'application de la transformée en ondelettes séparables 2D.

Il nous reste, pour garantir une reconstruction parfaite de l'image, à définir la notion de résidu.

2.1.5 Estimation de l'image du résidu

Afin de prendre en charge les pixels qui ne sont pas directement représentés par les coefficients de bandelettes, la première étape consiste à estimer une image uniquement à partir des coefficients de bandelettes. Nous utilisons encore une fois la méthode d'inpainting que nous venons de définir pour combler la zone externe de nos pixels de bandelettes. Par contre, comme la propagation de l'information ne se fait plus dans une boîte englobante isolée mais plutôt dans une image dont le support correspond à l'image initiale, nous allons confronter la propagation de l'information des différentes bandes. Nous allons donc appliquer un traitement supplémentaire pour nous assurer de la régularité globale de l'image.

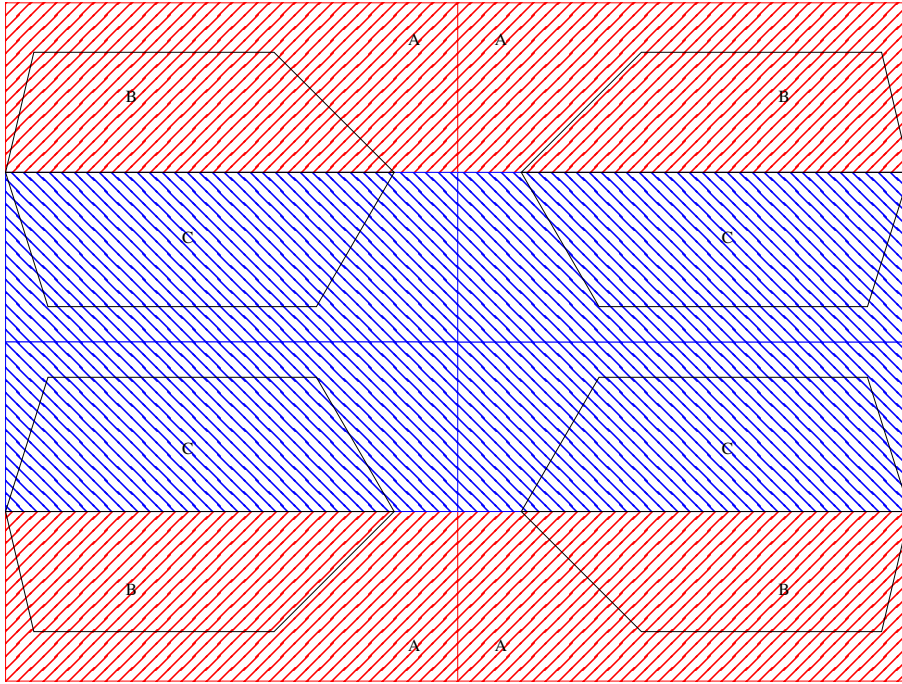


Figure 2.14: Donnée symétrisée.

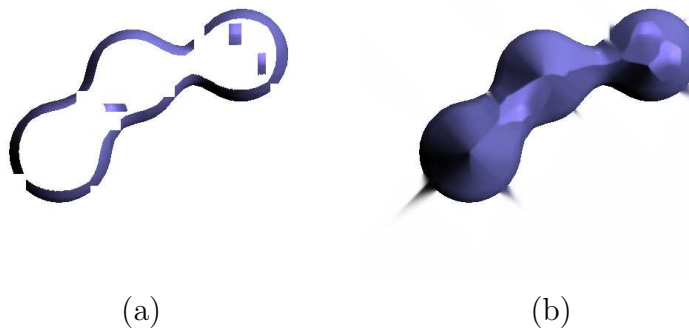


Figure 2.15: Estimation de l'image Metaballs uniquement à partir des pixels codés par les coefficients de bandelettes. (a) Pixels codés par les coefficients de bandelettes. (b) Image estimée avec la méthode de restauration utilisée pour les zones de contours (voir figure 2.12).

Nous appliquons dans un premier temps la méthode de propagation de l'information proposée pour les bandes dans les boîtes englobantes. La figure 2.15 est un exemple de résultat sur l'estimation de l'image Metaballs par diffusion de l'information des bandes codées par les coefficients de bandelettes. Nous constatons que la propagation, produit des singularités.

Pour régulariser cette image, nous allons utiliser directement l'outil que nous avons à disposition (*i.e.* la transformée en ondelettes séparables 2D). Le processus itératif de régularisation sera ici obtenu par la répétition de deux phases : mise à jour des pixels de bandelettes (pixels que codent les coefficients de bandelettes) puis suppression de certains coefficients d'ondelettes. La suppression des coefficients de bandelettes permet de régulariser l'image en supprimant ses détails. Comme elle supprime également les détails contenus dans les pixels de bandelettes, nous réinitialisons la valeur de ces pixels.

Nous nous sommes inspirés de l'inpainting par équation aux dérivées partielles utilisant un processus multi-échelle que nous pouvons retrouver par exemple dans la thèse de Bourdon P. [10]. Nous éliminons d'abord tous les coefficients d'ondelettes jusqu'à une échelle N et itérons le processus jusqu'à une certaine stabilisation (l'évolution de l'estimation mesurée en terme d'énergie descend en dessous d'un certain seuil). Une fois cette stabilisation obtenue nous passons à l'échelle $N - 1$, c'est à dire que nous éliminons tous les coefficients d'ondelettes jusqu'à cette échelle et itérons jusqu'à stabilisation. Nous continuons ce processus jusqu'à l'échelle 1.

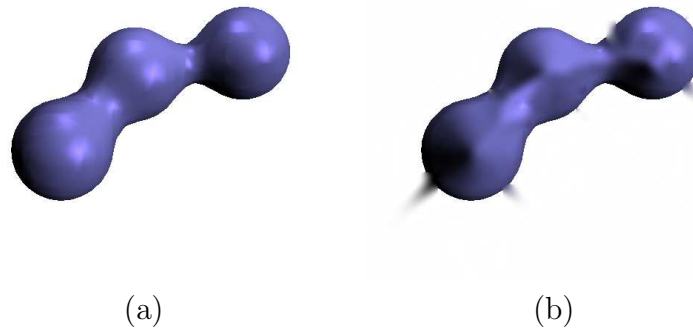


Figure 2.16: Estimation de l'image Metaballs uniquement à partir des pixels codés par les coefficients de bandelettes. (a) Image originale. (b) L'image estimée à partir des coefficients de bandelettes.

Nous voyons dans la figure 2.16 avec l'image (a) l'ensemble des pixels codés à partir des coefficients de bandelettes. Les pixels qui ne sont pas associés à un contour sont donc "restaurés" en obtenant une estimation de l'image Metaballs à partir de ses coefficients de bandelettes : image (b) de la figure 2.16.

Une fois cette estimation obtenue nous pouvons traiter efficacement le reste de l'information. En effet, de par l'estimation de l'image, les coefficients de bandelettes représentent

la majeure partie de l'information basse fréquence de l'image plus l'information haute fréquence des zones de bandelettes. Les détails de l'image qu'il reste à coder seront pris en charge à partir de l'image de résidu. Elle correspond à la différence entre l'image estimée et l'image initiale. Les coefficients d'ondelettes de l'image de résidu ne code plus que l'information haute fréquence des zones externes aux zones de bandelettes et une faible partie de l'information basse fréquence toujours dans les zones externes. L'exemple que nous proposons à la figure 2.16 permet de construire une image de résidu dont l'énergie correspond à 0.227% de l'énergie de l'image initiale.

La transformée est donc associée aux données suivantes :

- Les informations de contours : positions de départ et codes de Freeman.
- Les coefficients de bandelettes.
- Les coefficients d'ondelettes du résidu.

Nous allons maintenant reprendre les différentes étapes pour définir la procédure permettant, à partir de ces données, la reconstruction de l'image initiale.

2.1.6 Reconstruction

Pour synthétiser l'image à partir des coefficients il est nécessaire de redéfinir les vecteurs de déformation des zones. Ceci implique que nous devons également retrouver les pixels associés aux coefficients de bandelettes et les pixels qui seront pris en charge par l'image de résidu. Pour cela, à partir des contours, nous reprenons les étapes de construction des fonctions de déformation, puis la construction des zones de bandelettes par la méthode de feu de prairie.

À chaque zone identifiée à un contour, ainsi qu'à l'image de résidu, est associée un ensemble de coefficients d'une transformée en ondelettes séparables 2D. Nous reconstruisons les pixels de chacune de ces zones à partir de ces coefficients.

Une fois ces opérations effectuées, si les coefficients de bandelettes ne sont pas modifiés, les données reconstruites seront exactement les mêmes que celles utilisées pour l'estimation de la section 2.1.5. Par conséquent, si nous appliquons l'estimation de l'image initiale à partir des coefficients de bandelettes, il ne restera plus qu'à ajouter le résidu pour obtenir l'image initiale.

La reconstruction ne demande pas de nouvelle manipulation sur les données à part la répétition de l'estimation de l'image initiale à partir des pixels de bandelettes. Nous allons maintenant appliquer notre transformée à la suppression de bruit blanc gaussien ajouté aux images Metaballs, Splash et Mandrill.

2.1.7 Application à la suppression du bruit

La restauration d'image par suppression du bruit est l'une des applications pour laquelle la transformée en ondelettes s'est avérée très appropriée. Il est notamment possible d'obtenir de très bons résultats à partir de la transformée en ondelettes non décimée [7, 23].

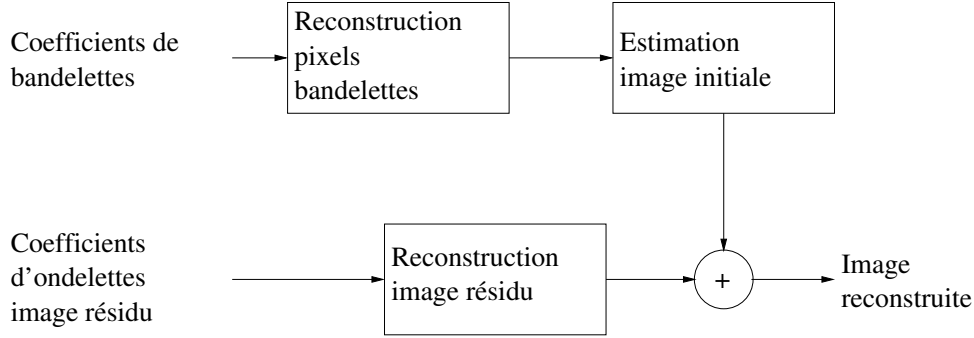


Figure 2.17: Schéma bloc de la transformée en bandelettes inverses.

Le principe de cette restauration repose sur la supposition que la détérioration de l'image correspond à :

$$I_d = I_o + B \quad (2.9)$$

avec B la réalisation d'un bruit blanc gaussien centré en 0 d'écart type σ . La transformée en ondelettes séparables 2D non décimée permet la conception d'une méthode de débruitage efficace. La méthode consiste à seuiller l'ensemble des coefficients d'ondelettes en fonction de ses caractéristiques. Le but est de diminuer au maximum la détérioration causée par le bruit tout en perdant un minimum de détails de l'image.

Pour cela, la méthode utilisée consiste à appliquer une transformée en ondelettes non décimée puis un seuillage basé sur σ_e l'écart type du bruit estimé sur la première échelle de la transformée en ondelettes. Il existe deux types de seuillage. Le seuillage dur correspond à (t étant le seuil) :

$$s_{dur}(c) = \begin{cases} 0 & \text{si } |c| < t \\ c & \text{si } |c| > t \end{cases} \quad (2.10)$$

Nous avons choisi ce type de seuil, mais il existe également le cas du seuillage doux :

$$s_{doux}(c) = \begin{cases} c + t & \text{si } c < -t \\ c - t & \text{si } c > t \\ 0 & \text{si } -t < c < t \end{cases} \quad (2.11)$$

Comme nous l'avons précisé précédemment, le seuil est défini à partir de l'estimation de l'écart type σ_e du bruit. Cette estimation est effectuée à partir de la valeur médiane de l'ensemble des bandes de fréquences de la première échelle. Le seuil est ensuite défini à partir de la formule :

$$t = 3 * \sigma_e \quad (2.12)$$

Ce choix plutôt que le seuil idéal issu de la minimisation de l'erreur quadratique ($\sqrt{2 \log n \sigma_e}$ avec n le nombre d'échantillons) est issu de l'expérience du débruitage en ondelettes. Ce seuil est d'ailleurs présenté dans le livre de Mallat [47].

Nous allons par la suite nous appuyer sur cette formulation du seuil pour effectuer les seuillages associés à notre restauration d'images bruitées. Dans le cadre de la transformée en bandelettes, nous utilisons le seuil estimé à partir de la transformée sur l'image complète pour effectuer le débruitage sur les différentes bandes. Le bruit que nous appliquons à nos images de test correspond à un bruit blanc additif gaussien d'écart type 30 centré en 0. Afin d'être cohérent avec la transformée en bandelettes qui est basée sur des décompositions décimées, nous comparerons nos résultats avec le débruitage à partir de la transformée en ondelettes décimée.

Nous avons choisi pour nos tests d'utiliser l'ondelette Spline (2, 2) définie par Cohen *et al.* [21]. Le but est de profiter de la symétrie de cette fonction ainsi que de son support court. Cette fonction sera utilisée aussi bien pour la transformée en ondelettes séparables que pour la transformée en bandelettes. Le support court de cette ondelette nous permet de limiter les interactions entre les zones de bandelettes et l'extérieur lors de la transformée de la zone de bandelettes. La symétrie de cette ondelette nous servira par la suite, lorsque nous définirons une version à redondance forte de la transformée en bandelettes.

Nous allons donc commencer par montrer quelques résultats de débruitage en mettant en parallèle le résultat obtenu à partir de la transformée en ondelettes séparables et la transformée en bandelettes.

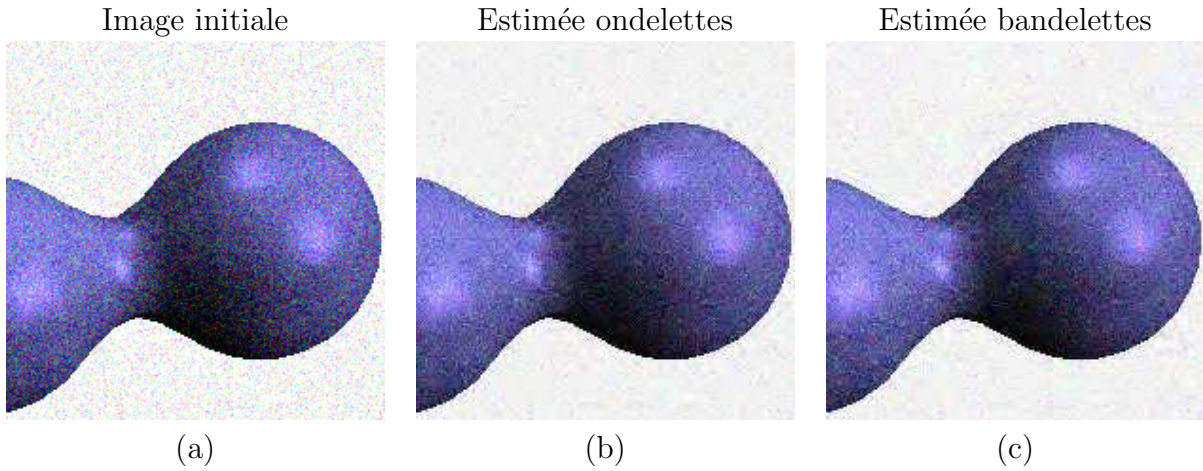


Figure 2.18: Test de débruitage avec les décompositions décimées. (a) Image Metaballs bruitée. (b) Transformée en ondelettes séparables 2D (PSNR = 23.0162 dB). (c) Transformée en bandelettes (PSNR = 22.9448 dB).

Le premier ensemble d'images de la figure 2.18 correspond à une partie de l'image Metaballs que nous avons bruitée (image (a)), puis débruitée à l'aide de la transformée en ondelettes séparables 2D (image (b)) et la transformée en bandelettes (image (c)). Dans

ce premier cas l'amélioration apportée par l'utilisation de la transformée en bandelettes n'est pas des plus probant. Ce motif n'étant pas compliqué, nous sommes dans le cadre idéal d'utilisation de la transformée en bandelettes (quelques détails dans l'image et des singularités contrastées et de taille importante). Pour autant la transformée géométrique obtient des résultats similaires que ce soit en terme de PSNR ou en terme de qualité visuelle. Il est à noter que pour les besoins du test nous avons utilisé un seuil pour la transformée en bandelettes comparable à celui de la transformée en ondelettes séparables et que par conséquent l'estimation de ce seuil ne tient pas compte des spécificités de la transformée en bandelettes.

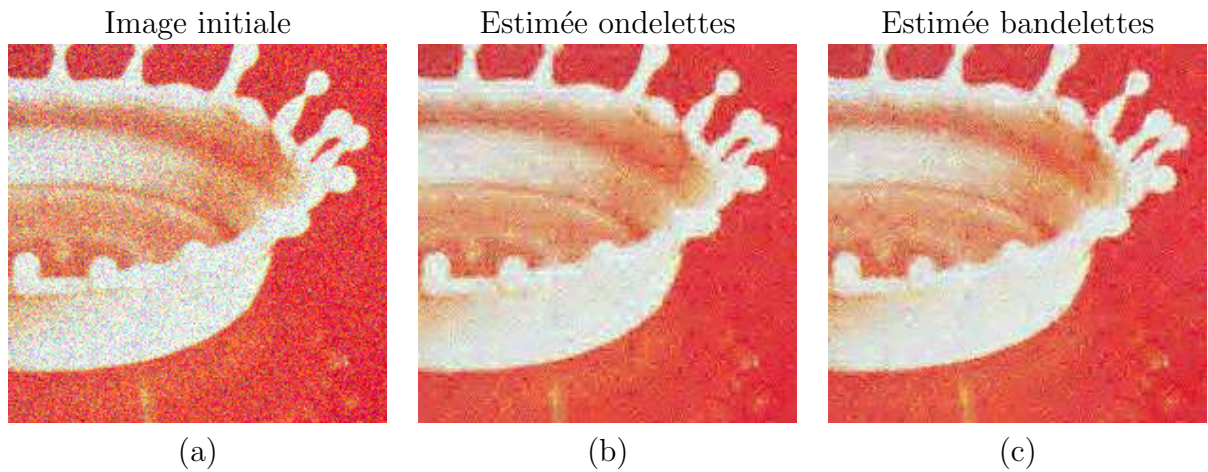


Figure 2.19: Test de débruitage avec les décompositions décimées. (a) Image Splash bruitée. (b) Transformée en ondelettes séparables 2D (PSNR = 23.4638 dB). (c) Transformée en bandelettes (PSNR = 23.2081 dB).

Le deuxième test (figure 2.19) correspond à une image qui contient des motifs réguliers. Par contre, les singularités ont une forme qui s'accorde beaucoup moins aux zones contenant les pixels de bandelettes : la forme plus torturée des singularités implique que nos zones de bandelettes sont beaucoup plus petites. Les résultats sont encore une fois très comparables en terme de PSNR ou en terme de qualité visuelle. L'image de ce test appartient à la base que nous utilisons par la suite pour générer les tableaux de PSNR (image 4.2.01).

La particularité du dernier test (figure 2.20) pour lequel nous présentons une illustration, est la présence de larges zones texturées. Cette image se trouve également dans la base de test : image 4.2.03. Nous avons constaté dans ce genre de cas (présence de zones texturées) une prise en compte peu fiable de la géométrie. Nous avons encore une fois, dans le cadre de ce test, des résultats similaires que ce soit en terme de PSNR ou de qualité visuelle. Mais de nouveau le protocole utilisé vise la comparaison de la transformée en bandelettes et de la transformée en ondelettes séparables. Nous ne tenons pas compte des spécificités des coefficients de bandelettes.

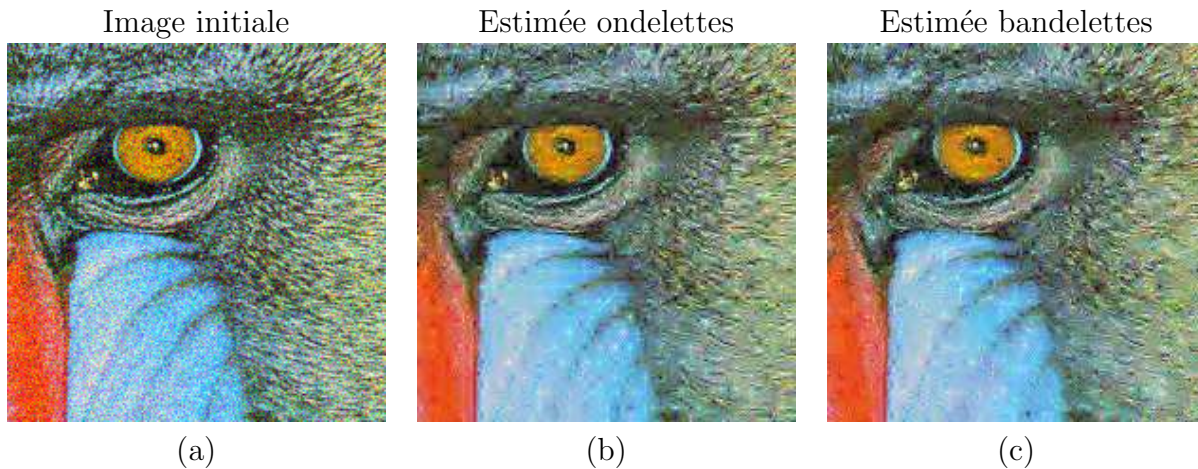


Figure 2.20: Test de débruitage avec les décompositions décimées. (a) Image Mandrill bruitée. (b) Transformée en ondelettes séparables 2D (PSNR = 19.6501 dB). (c) Transformée en bandelettes (PSNR = 19.4596 dB).

Nous proposons également trois tableaux de résultats correspondant à ces mêmes tests appliqués sur un ensemble d'images, disponible à l'adresse <http://sipi.usc.edu/database/>. Cette base d'images regroupe plusieurs bases. La première que nous allons exploiter contient des images de textures (incluant les images de la base de Brodatz). La deuxième base est composée de prises de vue aériennes. La dernière base regroupe plusieurs images connues telles que Lena, le Mandrill (figure 2.20), Splash (figure 2.19) et d'autres. Les tests effectués sur ces images sont présentés sous la forme de tableaux dont les colonnes indiquent, dans l'ordre, le nom de l'image respectant la nomenclature de la base, le nombre de canaux de l'image, le format de l'image, le PSNR du débruitage par ondelettes séparables et le débruitage par bandelettes. Le plus petit des deux PSNR est affiché en rouge.

Les résultats du premier tableau (tableau 2.1) sont dans la logique des résultats déjà présentés : la transformée en bandelettes ne se démarque pas de la transformée en ondelettes séparables. L'écart n'est jamais supérieur à 1 dB que ce soit dans un sens ou dans l'autre.

Les résultats du tableau 2.2 (images aériennes) indiquent la même tendance. Les raisons sont encore une fois à chercher dans le manque de contraste de l'image initiale impliquant une détection difficile des contours ou la forme des singularités qui se prête mal à la construction des zones de bandelettes.

La dernière base dont les résultats sont présentés dans le tableau 2.3 (images naturelles) confirme les résultats des deux autres tableaux. Pourtant ces images sont *a priori* plus adaptées à la transformée de par la nature des singularités. Même si elles contiennent nécessairement des textures fines, ces images contiennent des zones régulières avec des frontières aux formes également régulières (courbe d'un visage, délimitation de l'horizon,

CHAPITRE 2. TRANSFORMÉE EN BANDELETTES PREMIÈRE GÉNÉRATION

Image	n_c	Format	Ondelettes	Bandelettes	Image	n_c	Format	Ondelettes	Bandelettes
1.1.01	1	512x512	17.4031	17.424	1.1.02	1	512x512	19.4822	19.7389
1.1.03	1	512x512	18.7989	19.3012	1.1.04	1	512x512	19.3135	19.5279
1.1.05	1	512x512	20.3943	20.6873	1.1.06	1	512x512	18.118	18.4569
1.1.07	1	512x512	19.8333	20.0814	1.1.08	1	512x512	22.1382	22.1281
1.1.09	1	512x512	21.2639	21.2216	1.1.10	1	512x512	19.9767	20.4161
1.1.11	1	512x512	20.6995	20.9649	1.1.12	1	512x512	21.1632	21.2987
1.1.13	1	512x512	19.9502	20.3021	1.2.01	1	512x512	16.0191	15.7936
1.2.02	1	512x512	17.6929	17.622	1.2.03	1	512x512	16.2106	16.3355
1.2.04	1	512x512	15.8131	15.5093	1.2.05	1	512x512	16.1127	16.0239
1.2.06	1	512x512	15.5951	15.4469	1.2.07	1	512x512	15.9658	15.7381
1.2.08	1	512x512	17.8728	17.2837	1.2.09	1	512x512	18.542	17.9566
1.2.10	1	512x512	17.6114	17.2681	1.2.11	1	512x512	16.7749	16.5733
1.2.12	1	512x512	17.2473	17.4547	1.2.13	1	512x512	18.3803	18.3356
1.3.01	1	1024x1024	20.0731	20.2806	1.3.02	1	1024x1024	20.8404	21.122
1.3.03	1	1024x1024	21.2724	21.5804	1.3.04	1	1024x1024	19.6047	19.6752
1.3.05	1	1024x1024	19.7206	19.9908	1.3.06	1	1024x1024	20.3551	20.7378
1.3.07	1	1024x1024	21.6572	21.7952	1.3.08	1	1024x1024	22.9119	22.7512
1.3.09	1	1024x1024	23.1949	23.136	1.3.10	1	1024x1024	22.4633	22.5364
1.3.11	1	1024x1024	21.6228	21.7607	1.3.12	1	1024x1024	21.94	22.0766
1.3.13	1	1024x1024	21.3493	21.603	1.4.01	1	1024x1024	21.5924	21.8447
1.4.02	1	1024x1024	21.5948	21.7224	1.4.03	1	1024x1024	22.1992	22.2036
1.4.04	1	1024x1024	22.8282	22.6007	1.4.05	1	1024x1024	22.3707	22.2985
1.4.06	1	1024x1024	22.2814	22.2043	1.4.07	1	1024x1024	22.0534	22.1676
1.4.08	1	1024x1024	22.2974	22.2234	1.4.09	1	1024x1024	21.1711	21.1671
1.4.10	1	1024x1024	20.3475	20.5238	1.4.11	1	1024x1024	19.6511	19.6924
1.4.12	1	1024x1024	20.1482	20.2062	1.5.01	1	512x512	22.5543	22.4849
1.5.02	1	512x512	19.0745	18.8422	1.5.03	1	512x512	21.0644	21.2743
1.5.04	1	512x512	20.7943	21.063	1.5.05	1	512x512	22.2302	22.4207
1.5.06	1	512x512	22.9187	22.0304	1.5.07	1	512x512	20.152	20.4085

Table 2.1: Tableau de PSNR des images de textures.

CHAPITRE 2. TRANSFORMÉE EN BANDELETTES PREMIÈRE GÉNÉRATION

Image	n_c	Format	Ondelettes	Bandelettes	Image	n_c	Format	Ondelettes	Bandelettes
2.1.01	3	512x512	20.4776	20.837	2.1.02	3	512x512	19.5334	19.8396
2.1.03	3	512x512	22.8948	22.6753	2.1.04	3	512x512	20.6491	20.8264
2.1.05	3	512x512	21.2937	21.6062	2.1.06	3	512x512	20.3018	20.6624
2.1.07	3	512x512	22.4467	22.2656	2.1.08	3	512x512	22.3557	22.4949
2.1.09	3	512x512	23.1203	22.9219	2.1.10	3	512x512	21.6095	21.7711
2.1.11	3	512x512	21.8654	22.1497	2.1.12	3	512x512	21.8604	22.0177
2.2.01	3	1024x1024	20.6825	20.7064	2.2.02	3	1024x1024	23.2945	22.9726
2.2.03	3	1024x1024	22.809	22.7117	2.2.04	3	1024x1024	21.6737	21.7217
2.2.05	3	1024x1024	21.1494	21.4023	2.2.06	3	1024x1024	23.3285	23.053
2.2.07	3	1024x1024	22.9403	22.7632	2.2.08	3	1024x1024	20.7907	20.8226
2.2.09	3	1024x1024	22.7119	22.5182	2.2.10	3	1024x1024	22.9518	22.7026
2.2.11	3	1024x1024	22.08	22.0793	2.2.12	3	1024x1024	22.3244	22.14
2.2.13	3	1024x1024	22.219	22.1212	2.2.14	3	1024x1024	21.7154	21.6744
2.2.15	3	1024x1024	22.3246	22.1151	2.2.16	3	1024x1024	22.0037	22.0226
2.2.17	3	1024x1024	20.8642	21.2189	2.2.18	3	1024x1024	21.8483	21.8581
2.2.19	3	1024x1024	22.3681	22.2915	2.2.20	3	1024x1024	22.6492	22.5247
2.2.21	3	1024x1024	21.6218	21.6819	2.2.22	3	1024x1024	22.695	22.4824
2.2.23	3	1024x1024	23.5354	23.1894	2.2.24	3	1024x1024	22.2212	22.0848
3.2.25	1	1024x1024	21.5251	21.6504					

Table 2.2: Tableau de PSNR des prises de vue aériennes.

CHAPITRE 2. TRANSFORMÉE EN BANDELETTES PREMIÈRE GÉNÉRATION

Image	n_c	Format	Ondelettes	Bandelettes	Image	n_c	Format	Ondelettes	Bandelettes
4.1.01	3	256x256	22.4627	22.7103	4.1.02	3	256x256	22.8445	23.002
4.1.03	3	256x256	22.8398	22.6483	4.1.04	3	256x256	22.3513	22.5762
4.1.05	3	256x256	22.4695	22.5179	4.1.06	3	256x256	21.0402	21.2669
4.1.07	3	256x256	23.0443	22.8692	4.1.08	3	256x256	22.3843	22.4557
4.2.01	3	512x512	23.4244	23.2441	4.2.02	3	512x512	22.6482	22.6381
4.2.03	3	512x512	19.6463	19.8394	4.2.04	3	512x512	22.4981	22.6141
4.2.05	3	512x512	22.6384	22.6903	4.2.06	3	512x512	21.7016	21.7829
4.2.07	3	512x512	22.5363	22.611	5.1.09	1	256x256	22.1748	22.1111
5.1.10	1	256x256	19.774	20.1465	5.1.11	1	256x256	23.4721	23.2451
5.1.12	1	256x256	22.6862	22.4655	5.1.13	1	256x256	22.7569	22.2685
5.1.14	1	256x256	20.7392	21.0818	5.2.08	1	512x512	21.9162	21.9306
5.2.09	1	512x512	20.7588	21.0304	5.2.10	1	512x512	20.5317	20.7848
5.3.01	1	1024x1024	21.9594	22.0275	5.3.02	1	1024x1024	21.644	21.6581
7.1.01	1	512x512	22.0814	22.2586	7.1.02	1	512x512	23.3162	22.8718
7.1.03	1	512x512	22.2682	22.1386	7.1.04	1	512x512	22.1794	22.3453
7.1.05	1	512x512	21.4069	21.6686	7.1.06	1	512x512	21.449	21.6734
7.1.07	1	512x512	21.6172	21.8332	7.1.08	1	512x512	22.8104	22.6553
7.1.09	1	512x512	21.731	21.8947	7.1.10	1	512x512	22.1931	22.3573
7.2.01	1	1024x1024	24.5945	24.2513	boat.512	1	512x512	21.777	21.8616
elaine.512	1	512x512	22.5124	22.6261	gray21.512	1	512x512	23.5202	23.2266
house	3	512x512	21.7224	21.8388	numbers.512	1	512x512	20.2453	20.4096

Table 2.3: Tableau de PSNR d'un ensemble d'image naturelles.

les formes très géométriques des scènes d'intérieur).

Tous ces résultats vont dans le même sens : la transformée en bandelettes ne se démarque pas dans le cadre des décompositions décimées. Prenant en compte le fait que la transformée en ondelettes séparables décimée est beaucoup moins efficace que sa variante non décimée dans les applications de débruitage, nous en avons tiré la conclusion que la transformée en bandelettes à redondance faible n'était pas suffisante pour les applications de débruitage. Nous allons présenter une variante de la transformée en bandelettes prenant en compte des décompositions non décimées.

2.1.8 Bilan

Nous avons introduit un processus numérique équivalent à la transformée en bandelettes de première génération directement définie dans le domaine discret qui ne nécessite ni interpolation, ni modification des fonctions d'analyse sur le bord des zones. Cette version de la transformée propose différentes simplifications du processus du fait du passage du discret au continu.

Toutefois nous pouvons formuler des critiques sur les résultats que nous obtenons pour le débruitage des images : ils ne sont pas meilleurs que ceux de la transformée en ondelettes séparables décimée : que ce soit visuellement ou en terme de PSNR. De plus, l'estimation impliquée par le traitement en deux parties de l'image (bandes et résidu), impose d'effectuer un traitement relativement coûteux par rapport à la transformée elle-même, que nous aimerions éviter. Enfin, si nous confrontons ces résultats à ceux obtenus à partir de la transformée en ondelettes séparables non décimée (que nous présenterons à la fin du chapitre), nous avons des résultats inférieurs.

Tous ces aspects nous ont motivés pour définir une version de cette transformée dont la redondance serait plus importante, en une sorte de transposition de la transformée en ondelettes séparables non décimée pour la transformée en bandelettes.

2.2 Transformée en bandelettes à redondance forte

Comme nous l'avons dit, la conception d'une version à redondance forte de la transformée a été motivée par les résultats de restauration d'images découlant de l'utilisation de l'algorithme à trous [7] par les décompositions en ondelettes. La transformée en ondelettes non décimée permet d'obtenir une transformée en ondelettes séparables dont le nombre de coefficients n'est plus égal au nombre d'échantillons du signal traité mais égal à $(3n_e + 1) \times N$ (avec n_e le nombre d'échelles de la transformée et N le nombre de pixels). Cette variante de la transformée en ondelettes séparables a été conçue en supprimant la décimation qui permet normalement de garder un nombre de coefficients égal au nombre d'échantillons tout en garantissant la reconstruction du signal. Pour cela, l'algorithme à trous propose une modification des filtres d'analyse afin de transposer les calculs sur des ensembles de coefficients non décimés. Cette approche est par exemple utilisée dans [32, 59, 17]. Nous proposons d'introduire ce concept dans la transformée en bandelettes.

Cette transformée naturellement très proche de la version à redondance faible que nous venons d'introduire se compose des étapes suivantes :

- Détection des singularités.
- Construction de zones de bandelettes.
- Transformée sur les zones de bandelettes.
- Transformée sur l'ensemble de l'image.

L'étape de détection des singularités ne subit aucune modification lors du passage à la version à redondance forte. Nous allons donc étudier directement la construction des zones de contours.

2.2.1 Construction des zones de contours

Nous allons faire évoluer les contraintes sur la forme de la zone. En passant à une version à forte redondance, l'effort consenti pour minimiser le nombre de coefficients de bandelettes n'est plus d'actualité : nous définissons une zone autour de chaque contour selon notre convenance indépendamment des autres contours (il n'y a plus de segmentation).

Pour déterminer les zones de contours, nous remplaçons le feu de prairie par la simple construction d'une bande de largeur fixée autour des contours. Cette approche des zones de contours implique que l'estimation des zones externes n'a plus lieu d'être puisque la zone de contours correspondra directement à sa potentielle boîte englobante. Une fois ces zones obtenues, en association avec leur déformation, nous construisons donc les zones rectangulaires auxquelles nous appliquons ensuite une transformée en ondelettes séparables 2D non décimée.

De par cette simplification de la forme, nous introduisons un recouvrement entre les différentes zones. Nous verrons à la section 2.2.3 que ces recouvrements ne sont pas un obstacle à la reconstruction de l'image.

Nous pouvons voir à travers la figure 2.21 une reconstruction des pixels des zones de contours uniquement à partir des coefficients de bandelettes.

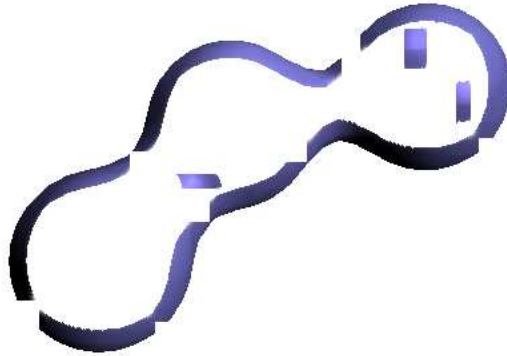


Figure 2.21: Ensemble des pixels correspondant aux coefficients de bandelettes.

Le résultat (en terme de recouvrement de la surface de l'image) est finalement comparable à ce que nous obtenons avec la version à redondance faible car le but est le même : nous souhaitons, à travers les coefficients de bandelettes prendre en charge l'ensemble des zones contenant des singularités. Comme nous venons de le voir, la construction des zones ne demande pas de traitements particuliers et la seule modification apportée pour le codage est l'utilisation d'une version non décimée (pas d'adaptation à la forme). Nous étudions maintenant la prise en charge des zones régulières.

2.2.2 Prise en compte du résidu

La prise en charge du résidu dans le cadre de la transformée à redondance forte ne nécessite, encore une fois, aucune économie en terme de coefficients d'ondelettes. Dans ce cas l'intérêt à utiliser une estimation des pixels en dehors des zones de contours est remis en cause. Nous proposons donc d'utiliser directement la transformée en ondelettes séparables 2D pour prendre en charge les pixels que nous ne pouvons pas reconstruire seulement à partir des coefficients de bandelettes. Cette méthode proposera donc également une reconstruction des pixels pris en charge par les coefficients de bandelettes à partir des coefficients d'ondelettes séparables 2D.

À ce stade, nous pouvons nous demander l'intérêt des coefficients de bandelettes si, au final, nous calculons la transformée en ondelettes séparables 2D non décimée sur toute l'image. La réponse réside dans l'étape de reconstruction que nous allons présenter à

la prochaine section. En effet, les coefficients de bandelettes ont la particularité d'être adaptés à la géométrie. La reconstruction de pixels de l'image issue de ces coefficients sera donc mise en avant par rapport à la reconstruction des coefficients d'ondelettes de l'image.

2.2.3 Reconstruction - Profils de pondération

Après reconstruction à partir des coefficients de bandelettes et des coefficients d'ondelettes 2D non décimés, il nous reste à associer ces différentes reconstructions afin de prendre en compte au mieux les caractéristiques de chaque type de coefficients pour la reconstruction de l'image.

Pour effectuer cette fusion, nous avons dans un premier temps défini la moyenne de toutes les reconstructions, un peu à la manière de la transformée non décimée (voir [7]) effectuant la moyenne des différentes phases de la reconstruction.

Le problème de cette première version est qu'elle ne met pas en avant les reconstructions des coefficients de bandelettes par rapport aux coefficients d'ondelettes séparables. Pour permettre cette mise en avant, nous allons utiliser des pondérations nous permettant ainsi d'exprimer l'importance de ces coefficients de bandelettes par rapport aux coefficients d'ondelettes. Chaque pixel de chaque reconstruction se voit assigner un poids c_i exprimant l'influence que nous lui attribuons par rapport aux autres reconstructions potentielles. Ensuite pour chaque pixel p , nous effectuons la somme pondérée par c_i de toutes les reconstructions du pixel, normalisée par la somme de tous les c_i associés à p .

Pour les pixels issus de la reconstruction des coefficients d'ondelettes est attribué un coefficient égal à 1. Pour les reconstructions des coefficients de bandelettes, nous utilisons un profil de pondération exprimant deux aspects :

- Pour prendre en compte le meilleur comportement des coefficients de bandelettes au niveau des contours, les pixels reconstruits au centre des zones de bandelettes se voient attribués un coefficient d'influence plus grand que pour les autres pixels.
- Pour prendre en compte l'isolement des zones de bandelettes par rapport au reste de l'image nous diminuons jusqu'à 0 le coefficient d'influence au fur et à mesure que le pixel reconstruit se rapproche du bord de la zone. Cela permet une transition entre la reconstruction par bandelettes et la reconstruction par ondelettes séparables.

Pour définir ces coefficients d'influence, nous utilisons un profil sur la zone rectangulaire à partir d'une fonction séparable. Nous notons le centre du support $c = (c_x, c_y)$. La fonction séparable sera construite à partir de $f : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$ et du support Ω de la zone rectangulaire de bandelettes. Soit L la largeur et H la hauteur du support, nous construisons notre pondération par :

$$f_1\left(\frac{2 \times (x - c_x)}{L}\right) \times f_2\left(\frac{2 \times (y - c_y)}{H}\right) \quad (2.13)$$

Où f_1 et f_2 sont deux spécialisations de f qui seront issues des caractéristiques de la bande en cours de pondération.

Il est bien entendu possible de faire évoluer cette formulation pour prendre en compte directement une fonction 2D ou de prendre en compte un profil de pondération, résultat d'une mesure sur l'ensemble. Il pourrait par exemple à l'avenir être intéressant de prendre en compte des mesures sur les caractéristiques locales de chaque bande dans la définition de ce profil.

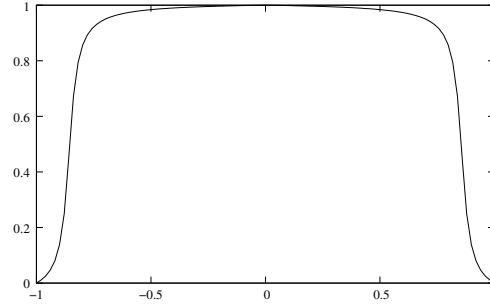


Figure 2.22: Profil de pondération normalisé à 1.

Nous proposons la fonction $f(x) = \frac{\tan^{-1}(\alpha - \beta|x|) - \tan^{-1}(\alpha - \beta)}{\tan^{-1}(\alpha) - \tan^{-1}(\alpha - \beta)}$ à valeur dans $[0, 1]$ (avec pour l'illustration figure 2.22, $\alpha = 30$ et $\beta = 35$). Son but est de traduire la forte influence de la zone centrale (que nous souhaitons large), la faible influence des zones périphériques (que nous souhaitons minces), tout en ayant une transition continue entre les deux types de zones. Nous utilisons une fonction à valeur dans $[0, 1]$ pour laisser à l'utilisateur le choix de la pondération (à l'aide d'un facteur) définissant l'influence des coefficients de bandelettes par rapport aux coefficients d'ondelettes. Le but de cette fonction est d'exprimer l'influence des pixels reconstruits pour une zone indépendamment du reste de l'image.

L'image de la figure 2.23 est une illustration de nos pondérations associées aux différents pixels des zones.

Nous avons donc défini une variante de la transformée en bandelettes de première génération basée sur une approche fortement redondante. Nous proposons maintenant d'appliquer cette transformée à des problèmes de restauration.

2.3 Application à la restauration d'image

Les problèmes de restauration d'image ont pour but de supprimer un défaut lié généralement au processus d'acquisition. Le processus ayant conduit de l'image I_o (image d'origine) à l'image I_d (image détériorée) que nous cherchons à restaurer n'est pas inversible. Restaurer une image revient donc à profiter de la nature de l'image pour concevoir un processus qui fera évoluer l'image restaurée I_r vers une solution plus en adéquation avec la nature de I_o et qui sera plus agréable à l'oeil.

Nous allons donc utiliser la transformée en bandelettes dans deux cas de restauration d'images :

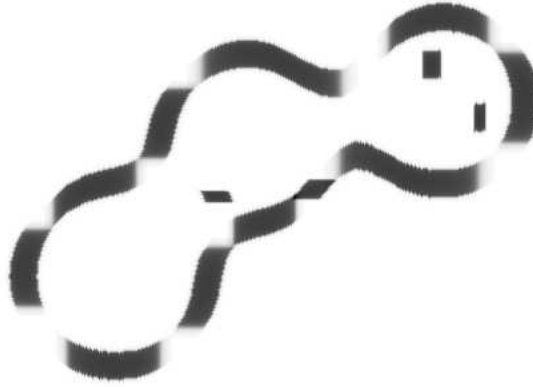


Figure 2.23: Confrontation des profils de pondération pour l'ensemble de l'image.

- La suppression d'un bruit blanc additif gaussien.
- La suppression d'effet de bloc d'une image JPEG.

Pour évaluer nos résultats, nous proposons la mesure du PSNR (Peak Signal-to-Noise Ratio) permettant de définir à partir d'une échelle logarithmique la qualité d'une approximation (que ce soit après compression ou restauration) d'une image. Il se base sur la moyenne de l'erreur quadratique MSE (Mean Square Error) :

$$MSE(I_o, I_r) = \frac{1}{N} \sum_{c \in \Omega} \|I_o(c) - I_r(c)\|_2^2 \quad (2.14)$$

Dans l'équation 2.14, N correspond au cardinal de l'image. Dans le cadre d'une image en niveau de gris le PSNR est donc :

$$PSNR(I_o, I_r) = 10 \log_{10} \left(\frac{255^2}{MSE(I_o, I_r)} \right) \quad (2.15)$$

Dans le cas des images couleurs, comme nous effectuons la somme des carrés des composantes couleurs pour calculer le terme MSE, nous utiliserons 3×255^2 comme erreur quadratique moyenne maximum au lieu de 255^2 pour les images en niveau de gris.

Dans le cadre de la transformée en bandelettes nous utilisons comme base d'ondelettes la fonction Spline (2, 2) afin d'avoir une fonction à support relativement étroit, et symétrique. La symétrie des fonctions d'analyse a également un intérêt d'ordre pratique : la transformée appliquée aux zones de bandelettes "symétrisées" sera plus simple

à obtenir. Comme ces transformées sont non décimées, nous pouvons appliquer la même technique que pour les signaux périodiques : nous n'avons pas besoin de construire des ensembles étendus pour permettre l'application de la transformée. Lorsque nous appliquons une opération sur un élément en dehors du support du signal, nous l'appliquons à l'élément dans le support dont la position est symétrique à notre élément externe par rapport à la frontière du signal.

2.3.1 Application au débruitage

Nous allons effectuer un seuillage de nos coefficients d'ondelettes et de bandelettes en nous appuyant encore une fois, sur les travaux de Donoho D.L. [32] et Starck J.-L. [7]. Nous comparons cette fois notre transformée composée de décompositions non décimées à la transformée en ondelettes non décimée.

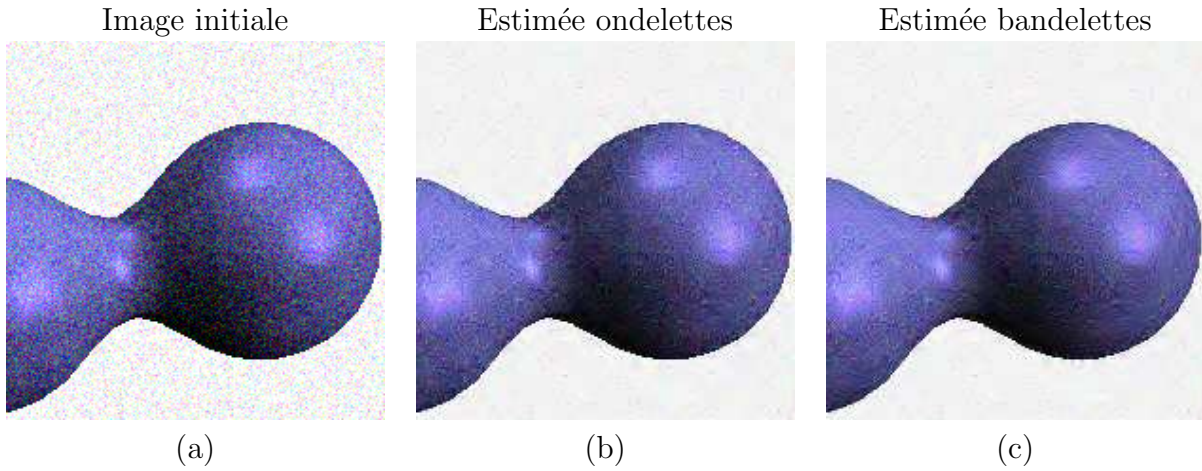


Figure 2.24: Test de débruitage avec les décompositions non décimées. (a) Image Metaballs bruitée. (b) Transformée en ondelettes séparables 2D (PSNR = 24.1166 dB). (c) Transformée en bandelettes (PSNR = 24.2998 dB).

Le premier test 2.24 basé sur l'image qui a illustré les étapes de la transformée en bandelettes, nous permet de voir le comportement de la transformée pour des images synthétiques. Nous constatons une très légère amélioration du PSNR. Visuellement nous ne constatons pas de différences. La transformée en ondelettes non décimée obtient en fait de très bons résultats que nous pouvons difficilement surpasser si nous gardons le protocole de seuillage qui a été conçu pour elle.

Dans le cadre d'une image réelle ne contenant pas de texture, comme Splash (figure 2.25), nous constatons une plus forte amélioration du PSNR par rapport à la transformée en ondelettes séparables non décimée. Visuellement le constat est le même que pour l'image précédente.

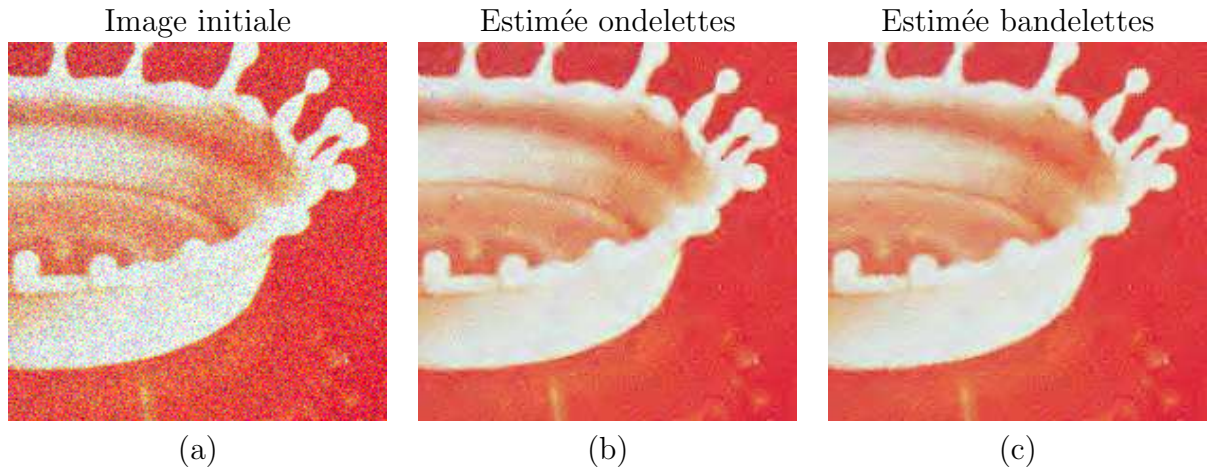


Figure 2.25: Test de débruitage avec les décompositions non décimées. (a) Image Splash bruitée. (b) Transformée en ondelettes séparables 2D (PSNR = 26.6868 dB). (c) Transformée en bandelettes (PSNR = 27.0888 dB).

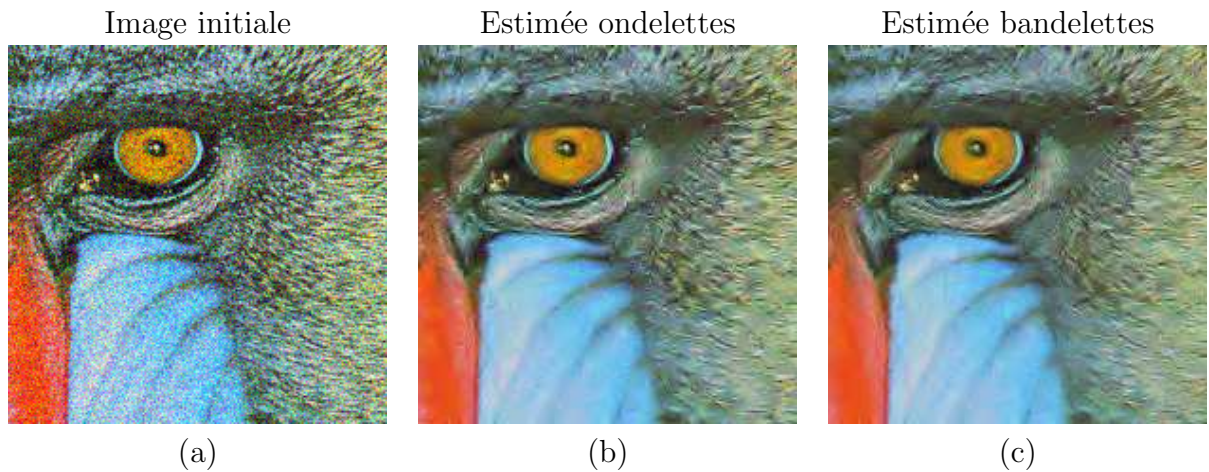


Figure 2.26: Test de débruitage avec les décompositions non décimées. (a) Image Mandrill bruitée. (b) Transformée en ondelettes séparables 2D (PSNR = 22.5784 dB). (c) Transformée en bandelettes (PSNR = 22.4073 dB).

La dernière figure proposée (figure 2.26) correspond à une image réelle texturée Mandrill. Dans le cadre de ce type d'image, notre test est moins concluant puisque nous subissons même une baisse du PSNR et que nous n'améliorons toujours pas la qualité visuelle. Nous expliquons la baisse de PSNR par la difficulté qu'a la transformée en bandelettes à prendre en compte la texture d'une image en tant que singularité.

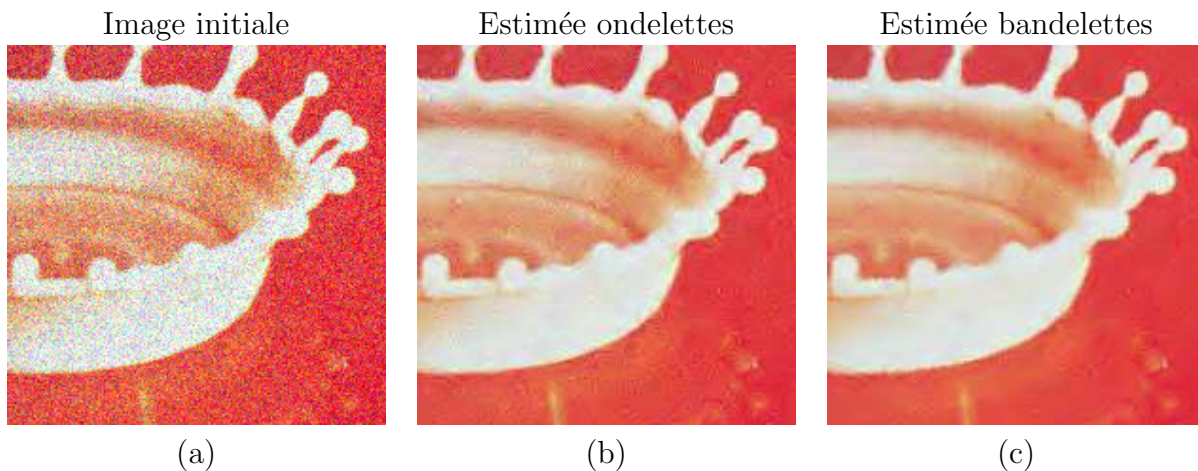


Figure 2.27: Test de débruitage avec les décompositions non décimées (seuil augmenté). (a) Image Splash bruitée. (b) Transformée en ondelettes séparables 2D (PSNR = 26.6868 dB). (c) Transformée en bandelettes (PSNR = 29.0223 dB).

Nous proposons un test (figure 2.27) dans lequel nous allons utiliser un seuil augmenté, c'est à dire que nous allons le multiplier par une constante égale à 1.2. En agissant ainsi, nous postulons que la meilleure prise en compte des contours par la transformée géométrique nous permet d'augmenter le seuil pour la restauration sans subir de dégradation par effet de Gibbs. Les résultats sur l'image Splash sont effectivement meilleurs aussi bien en terme de PSNR que visuellement : l'image est plus lisse et ne subit toujours pas l'effet de Gibbs.

Afin de voir le comportement de la transformée sur une image texturée nous avons également appliqué cette augmentation de seuil pour l'image Mandrill (figure 2.28). Nous constatons que le PSNR, tout comme la qualité visuelle n'est pas amélioré par cette augmentation. Ceci est correspond encore une fois au fait que la transformée en bandelettes a du mal à prendre en compte la texture.

Nous proposons, comme pour la transformée en bandelettes à redondance faible des résultats à partir de l'ensemble d'images disponible à l'adresse <http://sipi.usc.edu/database/>.

Le tableau 2.4 représente de nouveau les tests de débruitages sur l'ensemble d'images de textures, mais cette fois pour les transformées basées sur les décompositions non décimées. La transformée en bandelettes à redondance forte apporte bien une amélioration des résultats par rapport à la transformée à redondance faible. Les PSNR obtenus sont dans

CHAPITRE 2. TRANSFORMÉE EN BANDELETTES PREMIÈRE GÉNÉRATION

Image	n_c	Format	Ondelettes	Bandelettes	Image	n_c	Format	Ondelettes	Bandelettes
1.1.01	1	512x512	20.9011	19.8498	1.1.02	1	512x512	22.96	23.0218
1.1.03	1	512x512	22.2777	22.3643	1.1.04	1	512x512	22.8532	23.069
1.1.05	1	512x512	23.5493	24.2744	1.1.06	1	512x512	21.4211	21.0662
1.1.07	1	512x512	23.2748	23.8002	1.1.08	1	512x512	25.553	26.8452
1.1.09	1	512x512	24.7431	25.2491	1.1.10	1	512x512	23.581	24.3107
1.1.11	1	512x512	23.9559	24.9217	1.1.12	1	512x512	24.3399	24.9996
1.1.13	1	512x512	23.4712	23.9279	1.2.01	1	512x512	19.3604	17.6583
1.2.02	1	512x512	20.9593	19.7517	1.2.03	1	512x512	19.6597	18.5126
1.2.04	1	512x512	19.5052	18.0053	1.2.05	1	512x512	18.9822	17.6062
1.2.06	1	512x512	18.6921	17.0711	1.2.07	1	512x512	19.2426	17.5302
1.2.08	1	512x512	21.1118	20.1818	1.2.09	1	512x512	21.4821	20.7486
1.2.10	1	512x512	21.2172	19.5928	1.2.11	1	512x512	19.9411	18.3481
1.2.12	1	512x512	19.8837	18.872	1.2.13	1	512x512	21.7098	20.7586
1.3.01	1	1024x1024	23.7628	24.3688	1.3.02	1	1024x1024	24.2977	25.3699
1.3.03	1	1024x1024	24.857	26.127	1.3.04	1	1024x1024	22.7811	22.8239
1.3.05	1	1024x1024	23.1997	23.5068	1.3.06	1	1024x1024	23.9568	24.852
1.3.07	1	1024x1024	25.1653	26.5886	1.3.08	1	1024x1024	26.2646	27.6169
1.3.09	1	1024x1024	25.7553	26.8427	1.3.10	1	1024x1024	25.7203	27.164
1.3.11	1	1024x1024	25.0612	26.4756	1.3.12	1	1024x1024	24.9401	26.0003
1.3.13	1	1024x1024	24.8369	26.2412	1.4.01	1	1024x1024	25.0975	26.5728
1.4.02	1	1024x1024	25.12	26.3151	1.4.03	1	1024x1024	25.4927	26.7965
1.4.04	1	1024x1024	26.1035	27.5786	1.4.05	1	1024x1024	25.5436	26.7075
1.4.06	1	1024x1024	25.6123	27.1014	1.4.07	1	1024x1024	25.4627	27.0208
1.4.08	1	1024x1024	25.7994	27.6752	1.4.09	1	1024x1024	24.1608	24.6878
1.4.10	1	1024x1024	23.752	24.5085	1.4.11	1	1024x1024	22.8317	23.0991
1.4.12	1	1024x1024	23.371	23.9291	1.5.01	1	512x512	26.077	27.6632
1.5.02	1	512x512	22.017	21.7191	1.5.03	1	512x512	24.4396	25.4402
1.5.04	1	512x512	23.7164	24.195	1.5.05	1	512x512	25.5684	26.9485
1.5.06	1	512x512	26.219	27.4403	1.5.07	1	512x512	23.5247	24.1405

Table 2.4: Tableau de PSNR des images de textures.

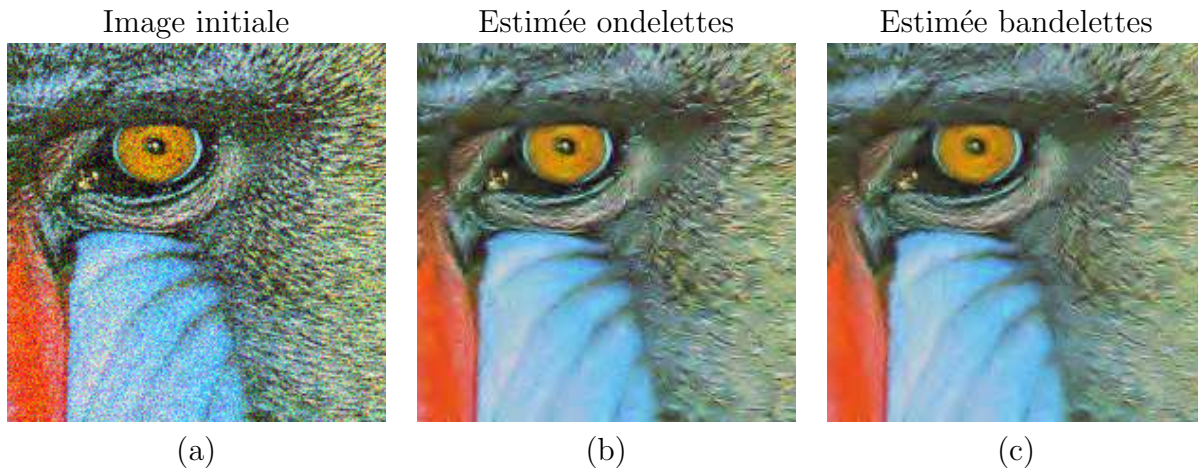


Figure 2.28: Test de débruitage avec les décompositions non décimées (seuil augmenté). (a) Image Mandrill bruitée. (b) Transformée en ondelettes séparables 2D (PSNR = 22.5784 dB). (c) Transformée en bandelettes (PSNR = 22.1554 dB).

la majorité des cas en faveur de la transformée en bandelettes. Le gain atteint presque 2 dB (image 1.4.08). Les images pour lesquels le gain est systématiquement inférieur (de 1.2.01 à 1.2.13) sont des copies des images 1.1.01 à 1.1.13 pour lesquelles il a été appliqué une égalisation d'histogramme.

Le tableau 2.5 donne des résultats du même ordre que le précédent. En effet nous obtenons une amélioration presque systématique du PSNR avec la transformée en bandelettes, même si nous n'obtenons jamais une amélioration aussi franche que pour l'image 1.4.08.

Le tableau 2.6 présente également des résultats pour lesquels la transformée en bandelettes obtient de meilleurs résultats à l'exception de deux images.

L'ensemble des résultats concernant la transformée en bandelettes à redondance forte sont satisfaisants étant donné l'amélioration du PSNR et de la qualité si l'on considère le résultat 2.27. Seuls quelques résultats sont moins bons en terme de PSNR. L'image très texturée Splash en est un exemple et montre, par la même occasion, un cas où l'amélioration de la qualité est discutable.

Nous allons ensuite proposer notre deuxième application de restauration : la suppression de l'effet de blocs.

CHAPITRE 2. TRANSFORMÉE EN BANDELETTES PREMIÈRE GÉNÉRATION

Image	n_c	Format	Ondelettes	Bandelettes	Image	n_c	Format	Ondelettes	Bandelettes
2.1.01	3	512x512	23.7142	24.2257	2.1.02	3	512x512	22.6279	22.5216
2.1.03	3	512x512	26.0363	26.9737	2.1.04	3	512x512	23.6883	24.1566
2.1.05	3	512x512	24.6655	25.6363	2.1.06	3	512x512	23.5545	24.1063
2.1.07	3	512x512	25.5959	26.3944	2.1.08	3	512x512	25.8165	27.3305
2.1.09	3	512x512	26.4863	27.7472	2.1.10	3	512x512	24.8913	25.7894
2.1.11	3	512x512	25.3507	26.9066	2.1.12	3	512x512	25.1431	26.2353
2.2.01	3	1024x1024	23.547	23.83	2.2.02	3	1024x1024	26.6375	27.7278
2.2.03	3	1024x1024	26.1723	27.5671	2.2.04	3	1024x1024	24.9404	25.7898
2.2.05	3	1024x1024	24.5355	25.5938	2.2.06	3	1024x1024	26.699	27.9184
2.2.07	3	1024x1024	26.275	27.5451	2.2.08	3	1024x1024	23.6825	23.9802
2.2.09	3	1024x1024	25.9897	26.9536	2.2.10	3	1024x1024	26.2881	27.3665
2.2.11	3	1024x1024	25.4009	26.5649	2.2.12	3	1024x1024	25.4943	26.2952
2.2.13	3	1024x1024	25.4125	26.4	2.2.14	3	1024x1024	24.861	25.7435
2.2.15	3	1024x1024	25.4669	26.2444	2.2.16	3	1024x1024	25.3596	26.4564
2.2.17	3	1024x1024	24.3587	25.4646	2.2.18	3	1024x1024	25.0518	25.9049
2.2.19	3	1024x1024	25.6661	26.7548	2.2.20	3	1024x1024	25.9351	27.1671
2.2.21	3	1024x1024	24.7977	25.5744	2.2.22	3	1024x1024	25.9329	26.8681
2.2.23	3	1024x1024	26.9104	28.1061	2.2.24	3	1024x1024	25.3906	26.3158
3.2.25	1	1024x1024	24.9524	25.9437					

Table 2.5: Tableau de PSNR des prises de vue aériennes.

CHAPITRE 2. TRANSFORMÉE EN BANDELETTES PREMIÈRE GÉNÉRATION

Image	n_c	Format	Ondelettes	Bandelettes	Image	n_c	Format	Ondelettes	Bandelettes
4.1.01	3	256x256	25.3886	26.7152	4.1.02	3	256x256	25.1692	26.3404
4.1.03	3	256x256	26.4035	27.5178	4.1.04	3	256x256	25.8471	27.2634
4.1.05	3	256x256	25.758	26.9653	4.1.06	3	256x256	24.3063	24.8443
4.1.07	3	256x256	26.6443	28.1285	4.1.08	3	256x256	26.1481	27.4603
4.2.01	3	512x512	26.689	28.1535	4.2.02	3	512x512	25.0998	26.1716
4.2.03	3	512x512	22.5813	22.4394	4.2.04	3	512x512	25.8411	27.2171
4.2.05	3	512x512	26.0813	27.2342	4.2.06	3	512x512	24.8591	25.5256
4.2.07	3	512x512	25.6619	26.962	5.1.09	1	256x256	25.5634	26.7091
5.1.10	1	256x256	23.2749	23.5013	5.1.11	1	256x256	26.9519	27.8736
5.1.12	1	256x256	25.8336	26.512	5.1.13	1	256x256	23.9338	24.0202
5.1.14	1	256x256	24.1754	24.8573	5.2.08	1	512x512	25.3487	26.2655
5.2.09	1	512x512	24.2218	24.6678	5.2.10	1	512x512	23.6365	24.0714
5.3.01	1	1024x1024	24.8694	26.1779	5.3.02	1	1024x1024	24.9144	25.7129
7.1.01	1	512x512	25.5741	27.0107	7.1.02	1	512x512	26.8547	28.2496
7.1.03	1	512x512	25.6146	26.9986	7.1.04	1	512x512	25.5487	27.1897
7.1.05	1	512x512	24.7051	25.8202	7.1.06	1	512x512	24.7746	25.9067
7.1.07	1	512x512	24.9844	26.2948	7.1.08	1	512x512	26.1339	27.4718
7.1.09	1	512x512	25.0933	26.237	7.1.10	1	512x512	25.6677	27.3514
7.2.01	1	1024x1024	27.3018	28.3536	boat.512	1	512x512	25.2582	26.2311
elaine.512	1	512x512	25.8829	27.2921	gray21.512	1	512x512	26.3501	27.6574
house	3	512x512	25.0754	25.929	numbers.512	1	512x512	23.6693	22.604

Table 2.6: Tableau de PSNR d'un ensemble d'image naturelles.

2.3.2 Suppression de l'effet de bloc

Le deuxième problème de restauration abordé est la suppression d'effet de blocs lié à la compression JPEG. Le principe de ce format de compression d'image se base sur un découpage de l'image en blocs 8×8 auxquels nous appliquons une transformée en cosinus discrets ou DCT (Discrete Cosinus Transform). La compression repose essentiellement sur la représentation parcimonieuse correspondant à la DCT en association avec une quantification des coefficients de ces blocs.

La quantification des coefficients de DCT implique que cette compression est destructive : il n'existe pas de fonction inversant le processus qui a mené à l'image compressée. Dans les faits, une trop forte compression produit l'apparition d'effet de blocs, ces mêmes blocs qui servent à l'application locale de la DCT. Ceci produit l'apparition de contours délimitant ces blocs dans le cas d'une compression trop importante.

Le but est donc, comme pour le débruitage, de réussir à supprimer la dégradation de l'image tout en préservant au maximum les détails conservés de l'image d'origine dans l'image compressée. Nous allons présenter tout d'abord quelques méthodes de la littérature.

Une première solution, [50] par exemple, propose d'utiliser ce que nous considérons comme une transposition du principe de la transformée en ondelettes non décimée à la transformée locale en cosinus discret. En effet, la méthode proposée consiste à coder puis décoder des versions translatées de l'image à restaurer. Une fois reconstruites, ces différentes versions translatées, seront ensuite ramenées à leur positions initiales pour être moyennées et former ainsi l'image restaurée.

Une autre approche [2] utilise une méthode basée sur une régularisation suivant le principe de la variation totale : la particularité de ce schéma de régularisation est qu'il prend en compte la structure de bloc de la DCT. Cela revient à appliquer un filtrage par diffusion anisotrope qui ne conserve pas les singularités issues de l'effet de blocs. Suivant ce même principe, Averbuch *et al.* [5] utilisent des moyennes pondérées à partir de noyaux de convolutions symétriques centrées sur les frontières entre blocs : le filtrage est encore une fois adapté à la structure des blocs.

Vérifiant plutôt des mesures statistiques, Wang *et al.* [69] proposent une méthode qui se base sur les auto similarités dans l'image en cherchant parmi des "baguettes" de pixels à l'intérieur des blocs, lesquelles ressemblent le plus aux "baguettes" à cheval sur les frontières. Une fois les appariements effectués les frontières sont modifiées à partir des "baguettes" de pixels à l'intérieur des blocs. Toujours en lien avec le domaine des statistiques Yang *et al.* [71] proposent l'étude d'une méthode basée sur le maximum *a posteriori*.

Enfin, nous discutons d'une dernière méthode de suppression de l'effet de blocs qui nous amène à la méthode que nous proposons à partir de la transformée en bandelettes : Xiong *et al.* [70] proposent une méthode de suppression de l'effet de blocs à partir de la transformée en ondelettes non décimée. Ils transposent le seuillage que nous venons de voir à l'application de suppression d'effet de blocs en modifiant l'estimation du seuil. Cette estimation se fait en deux étapes :

- Mise en évidence des singularités de l'image à partir d'une variante des maxima d'ondelettes.
- Estimation de l'écart type transposée aux contours fictifs produits par l'effet de blocs.

Le seuillage des coefficients d'ondelettes est conditionné par l'identification ou non d'un maxima d'ondelettes. De même, les coefficients basse fréquence (issus de la convolution par les fonctions d'échelles) situés aux niveaux des frontières de blocs sont modifiés à l'aide d'un filtre passe-bas dont l'application est conditionnée encore une fois par les maxima d'ondelettes.

Nous allons exploiter l'estimation proposée par [70] pour le traitement à base de transformée en ondelettes séparables 2D. Cette méthode consiste à estimer la variation entre les pixels situés de part et d'autre des frontières de blocs :

$$\sigma_{bloc} = \frac{1}{N_c N_l} \left(\sum_{x=1}^{\frac{N_c}{8}} \sum_{y=0}^{N_l} (I(8x, y) - I(8x - 1, y))^2 + \sum_{x=0}^{N_c} \sum_{y=1}^{\frac{N_l}{8}} (I(x, 8y) - I(x, 8y - 1))^2 \right) \quad (2.16)$$

Dans le cadre de notre transformée en bandelettes, nous n'utiliserons pas les maxima d'ondelettes comme dans la méthode proposée dans [70]. Nous allons nous appuyer sur le fait que la représentation en bandelettes permet déjà de privilégier les contours. En augmentant globalement le seuil utilisé sur la transformée, nous allons éliminer une plus grande quantité de détails. L'idée est que les contours dans l'image résisteront mieux à ce seuil appliqué à la transformée parce qu'ils sont représentés par la transformée en bandelettes. Le tout est d'augmenter ce seuil pour supprimer le plus de faux contours et le moins de détails réels possible.

Une autre contrainte à respecter est de ne pas détecter des frontières de blocs comme contours de l'image, sans quoi la restauration mettra encore plus en évidence les frontières de blocs. Nous n'avons pas adapté notre détection de contours par rapport à la problématique sur les images bruitées car nous obtenons des résultats plutôt convainquant, néanmoins il faut garder en mémoire que l'utilisation d'un détecteur de contours spécifiquement multirésolution, basé justement sur les maxima d'ondelettes [47], pourrait être une piste intéressante.

Pour la transposition de l'estimation de l'écart type σ_e nous calculons la valeur médiane aux seuls coefficients d'ondelettes (image de résidu) correspondant aux positions utilisées pour l'équation 2.16 définissant l'estimation du seuil en fonction de l'intensité de l'effet de bloc. Pour la restauration, nous utiliserons directement le seuillage sans conditionnement par rapport à des maxima d'ondelettes. La mise en valeur des contours de l'image proviendra du processus de seuillage impliquant les coefficients de bandelettes.

Nous constatons, sur notre premier exemple (figure 2.29) de suppression d'effet de blocs correspondant à l'image Metaballs, que notre méthode ne produit pas de détérioration des contours de l'image tout en permettant un lissage des zones uniformes et en particulier des frontières de blocs.

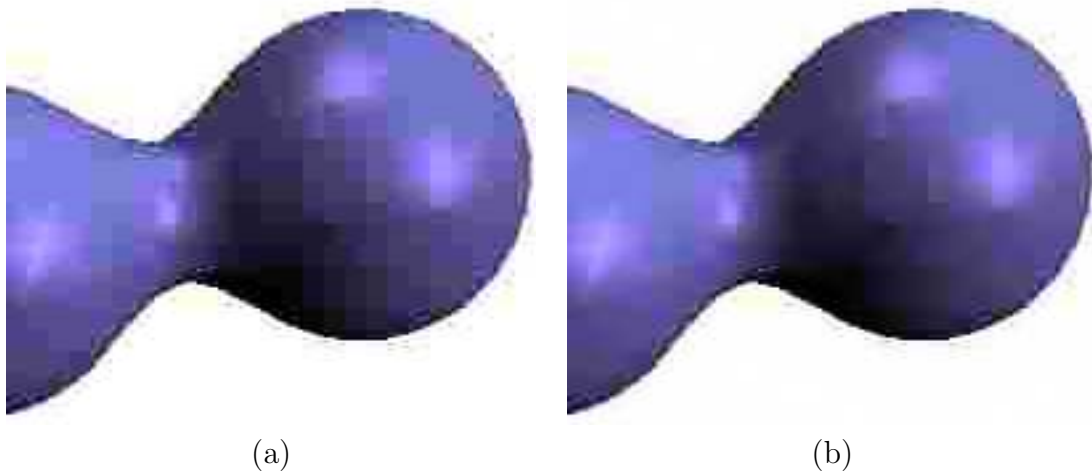


Figure 2.29: Test de suppression d'effet de blocs sur l'image Metaballs. (a) Image détériorée PSNR = 32.7023. (b) Image restaurée par bandelettes PSNR = 32.9996.

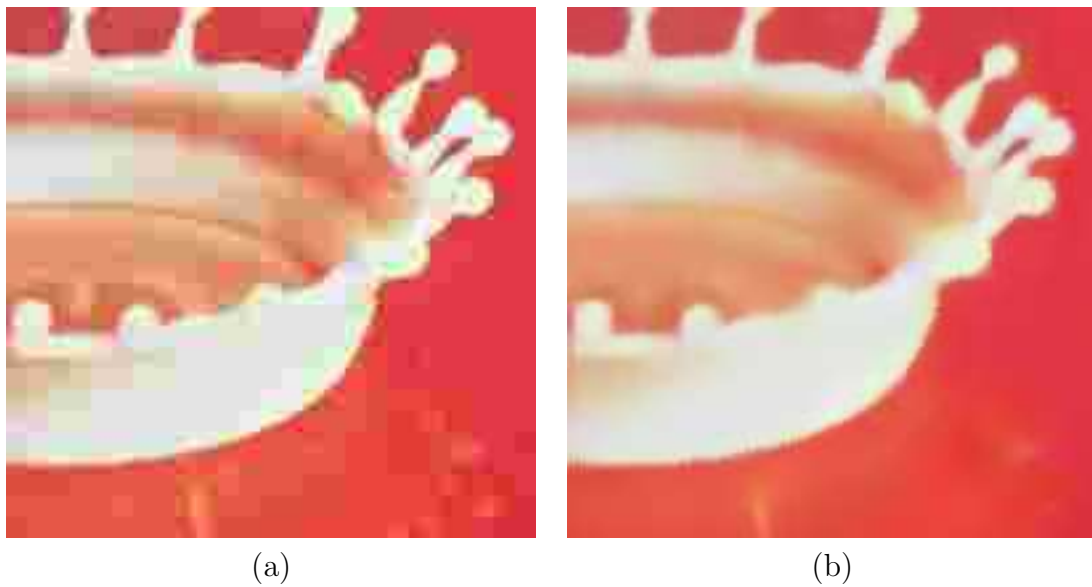


Figure 2.30: Test de suppression d'effet de blocs sur l'image Splash. (a) Image détériorée PSNR = 27.8614. (b) Image restaurée par bandelettes PSNR = 28.7618.

La figure 2.30 correspond à notre deuxième exemple de suppression d'effet de blocs appliqué à l'image Splash. Nous effectuons encore une fois un lissage des zones uniformes sans pour autant lisser les contours. Nous ne souffrons pas plus de l'effet de Gibbs : la transformée en bandelettes permet de seuiller plus fortement les coefficients que pour la transformée en ondelettes, tout en évitant de subir l'effet de Gibbs.



Figure 2.31: Test de suppression d'effet de blocs sur l'image Mandrill. (a) Image détériorée PSNR = 21.6335. (b) Image restaurée par bandelettes PSNR = 20.4767.

La dernière image Mandrill testée nous donne le résultat 2.31. Le résultat est dans ce cas peu convaincant : nous produisons un trop fort lissage des zones texturées. Le plus gros problème de cette transformée est en fait son *a priori* en ce qui concerne la taille et la forme des singularités qu'elle va mettre en valeur. La texture dans l'image Mandrill ne respectant pas cet *a priori*, elle ne seront pas prises en compte par les méthodes s'appuyant sur la transformée en bandelettes.

2.4 Analyses et critiques

Nous avons donc avec notre deuxième test de restauration sur les images subissant l'effet de blocs, une application intéressante pour la transformée en bandelettes de première génération à redondance forte. Nous devons améliorer l'estimation du seuil associé à la régularisation du signal, mais il semble que la transformée en bandelettes supporte mieux la suppression de coefficients en ce qui concerne l'apparition d'effet de Gibbs face à la transformée en ondelettes séparables. Le problème survient en fait lorsque nous nous attaquons à des images texturées qui augmentent singulièrement le seuil. La restauration a alors tendance à plus supprimer les détails de l'image alors qu'une image texturée supporte mieux l'effet de blocs (la détérioration étant moins visible dans la texture).

La première application de restauration a mené à des résultats mitigés pour la version à redondance faible que nous expliquons par la difficulté à maîtriser l'ensemble des étapes de la transformée : l'application de cette transformée passe par le choix de nombreux paramètres. Nous avons des résultats très comparables en terme de PSNR avec la transformée en ondelettes séparables. La qualité de la restauration est quant à elle améliorée, en terme de PSNR et de qualité visuelle, lorsque nous utilisons la version de la transformée en bandelettes à redondance forte. Des difficultés persistent lorsque les images contiennent de la texture.

Nous obtenons une amélioration de la prise en compte des contours au détriment des parties texturées. Nous utilisons une méthode relativement simple pour estimer les seuils dans le cas du débruitage. Il pourrait être intéressant d'essayer de transposer des méthodes plus évoluées en prenant en compte les spécificités des bandelettes que ce soit pour le débruitage ou la suppression d'effet de blocs. Un seuil plus adapté à cette transformée devrait prendre en compte des singularités de plus petite taille dans les coefficients de bandelettes : nous pourrions par exemple exploiter le fait que du bruit est moins perçu dans une zone texturée que dans une zone uniforme.

Une autre difficulté provient de l'isolement des bandes au reste de l'image, associé au fait que pour la version à redondance faible, ces bandes servent à l'estimation de l'image. Changer un coefficient de bandelettes (dans le cadre de la transformée à redondance faible) peut avoir une influence sur l'image qui dépasse de loin le support de la fonction de synthèse associée au coefficients de bandelettes.

La dernière critique concerne le nombre de paramètres. Il correspond au nombre d'étapes composant la transformée : nous devons les déterminer pour le filtrage préalable, la détection de contours, la taille minimum des contours, le nombre d'échelle des bandelettes et des ondelettes (doivent-ils avoir le même?), les fonctions d'ondelettes et de bandelettes mères.

Toutes ces critiques nous ont amené à la proposition d'une autre transformée en ondelettes géométriques adaptatives. Le but de cette transformée est de ne plus avoir d'*a priori* sur la taille et la forme des singularités et d'utiliser le "lifting scheme" pour simplifier les adaptations de nos fonctions d'analyses aux singularités de l'image. Le moyen que nous proposons d'utiliser pour identifier la géométrie de l'image sera l'exploitation

CHAPITRE 2. TRANSFORMÉE EN BANDELETTES PREMIÈRE GÉNÉRATION

des distances géodésiques entre échantillons.

Chapitre 3

Ondelettes et distance géodésique

La transformée que nous allons développer dans ce chapitre se positionne de nouveau dans le cadre des transformées géométriques adaptatives. Nous retrouvons donc les deux étapes principales avec la détection de la géométrie de l'image puis une transformée utilisant cette information.

Afin de prendre en compte la géométrie de l'image, nous allons modifier les opérations de convolution de la transformée en ondelettes sur le modèle du filtrage bilatéral [64] que nous allons adapter à un schéma de lifting. Le filtrage bilatéral s'appuie sur la distance euclidienne entre les valeurs des échantillons pour pondérer de manière adaptative la participation des échantillons du support dans le résultat de la convolution. Nous proposons d'utiliser la distance géodésique afin d'améliorer cette prise en compte de la géométrie à travers la pondération adaptative des éléments participant à la convolution. Ce choix a plusieurs conséquences importantes :

- Nous ne nous contentons pas d'impliquer les valeurs des échantillons dans la construction du filtrage, nous allons associer directement coordonnées et valeurs des échantillons et former ainsi un ensemble correspondant à une variété.
- Nous allons chercher la topologie particulière de cette variété à l'aide du graphe des k plus proches voisins.
- Nous allons chercher la distance entre deux éléments de la variété correspondant à notre distance géodésique en cherchant le plus court chemin reliant ces éléments à travers le graphe des k plus proches voisins.

La première conséquence de l'utilisation des distances géodésiques induit un point de vue différent sur les signaux que nous rencontrons par exemple dans les transformées [19, 39] : notre image en niveau de gris par exemple, est vue comme une surface dans un espace trois dimensions.

Nous énoncerons dans un premier temps un ensemble de rappels concernant les variétés. Nous introduirons un ensemble de notations car notre point de vue nous oblige à jongler sur les manières d'appréhender un même ensemble : notre "échantillon" peut être vu comme l'élément d'une variété associant ainsi coordonnées et valeurs de l'échantillon dans un même vecteur, se limiter aux seules coordonnées de l'échantillon dans l'image ou être vu comme le sommet d'un graphe dont nous aurons identifié les sommets aux pixels de l'image étudiée.

La deuxième conséquence est plutôt d'ordre pratique. Nous allons montrer qu'il est

possible dans un temps raisonnable de construire la topologie spécifique à la variété correspondant au signal. La construction du graphe des k plus proches voisins est gourmande en calcul (version où les plus proches voisins ne sont pas cherchés parmi un ensemble de labels en vue d'une classification mais parmi les échantillons du signal eux-mêmes). Nous proposons un nouvel algorithme basé sur la structure des signaux qui nous permet d'accélérer le processus.

Enfin cette approche va nous amener à présenter des rappels sur les graphes, notamment sur les conditions qui feront que la valeur de nos plus courts chemins correspondent à une distance. Ces rappels seront l'occasion d'une réflexion sur la connexité du graphe (et par extension de la variété), et ses implications, à travers la distance géodésique, sur le comportement de la transformée. Nous rappellerons l'algorithme de Dijkstra [27] pour la recherche des plus courts chemins. Nous finirons par des modifications simples apportées à cet algorithme pour prendre en compte les caractéristiques de la transformée et quelques résultats illustrant le comportement de cette distance face aux singularités d'une image.

Nous présenterons, comme pour le chapitre 2, des résultats de débruitage et de suppression d'effet de blocs afin de montrer l'apport de notre transformée dans le cadre de ces applications.

3.1 Lifting Scheme et distance géodésique

La transformée en ondelettes géométriques adaptatives que nous proposons s'appuie, comme nous venons de le suggérer, sur un schéma de lifting. Nous allons en effet profiter des avantages que procure cette formulation de la convolution, en particulier en ce qui concerne sa prise en charge de filtres non séparables, pour la construction de transformées adaptatives.

Nous allons tout d'abord présenter le filtrage bilatéral. Il va nous permettre d'introduire notre schéma de lifting en montrant l'intérêt des pondérations impliquant la valeur des échantillons dans le calcul de la convolution et le lien entre le schéma que nous proposons et les variétés.

3.1.1 Filtrage bilatéral

Nous allons commencer par présenter le filtrage bilatéral permettant le respect des contours d'une image, puis nous introduirons la notion de variété dans cette méthode.

Présentation du filtrage bilatéral

Le filtrage bilatéral proposé par Tomasi et al. [64], repris par Paris et al. [51] (comme alternative au filtrage anisotrope), correspond à l'adaptation d'un filtrage gaussien à partir des valeurs des éléments en pondérant la participation de chaque échantillon dans le support Ω du filtre en fonction de sa ressemblance avec l'élément central x :

$$h(x) = \frac{1}{k(x)} \int_{\Omega} f(\xi) c(\xi, x) s(f(\xi), f(x)) d\xi \quad (3.1)$$

Avec le dénominateur $k(x)$ correspondant à :

$$k(x) = \int_{\Omega} c(\xi, x) s(f(\xi), f(x)) d\xi \quad (3.2)$$

La fonction f correspond à notre signal et la fonction c définit le filtre tel que nous le concevons classiquement. La fonction s définit la pondération de nos échantillons dans le filtrage. Si s était une fonction constante égale à 1 notre filtre serait juste une nouvelle formulation de l'opération de convolution de f par c . Dans la proposition initiale [64], la fonction proposée est une gaussienne d'écart-type σ_d :

$$c(\xi, x) = e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{d(\xi, x)}{\sigma_d} \right)^2}$$

Cette formulation utilise directement une notion de distance euclidienne entre les coordonnées x de l'élément en cours de calcul et celles ξ de l'élément participant à ce calcul pour formuler le filtre gaussien : $d(\xi, x) = \|\xi - x\|_2$.

La fonction s constitue l'originalité du filtrage bilatéral, même si elle est définie de façon très similaire :

$$s(f(\xi), f(x)) = e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\delta(f(\xi), f(x))}{\sigma_r} \right)^2}$$

Encore une fois nous sommes en présence d'une gaussienne caractérisée par un écart-type σ_r et une distance euclidienne. Mais cette fois, c'est la distance entre les valeurs des éléments $\delta(f(\xi), f(x)) = \|f(\xi) - f(x)\|_2$ qui est prise en compte. Cette fonction implique ainsi les valeurs des échantillons dans le comportement du filtrage. En particulier, il permet de définir la participation d'un échantillon dans l'opération de convolution en fonction de sa ressemblance avec l'échantillon en cours de modification.

Des aspects pratiques sont évoqués dans [64] dont en particulier la mise en évidence du respect des contours de l'image par ce filtrage. L'influence de s par rapport à c est étudiée afin de montrer dans quelle mesure les contours seront respectés en modifiant σ_d et σ_r .

Nous avons donc un filtrage adaptatif basé sur la distance entre les valeurs des échantillons. Nous allons montrer qu'en abordant le signal à traiter suivant les variétés nous allons retrouver une approche similaire au filtrage bilatéral.

Introduction de la notion de variété

Nous proposons une transition entre le filtrage bilatéral et une modélisation du signal s'appuyant sur les variétés. Le but est de montrer le lien qui existe entre l'utilisation des valeurs des échantillons dans l'adaptation du filtrage et les variétés.

Nous considérons les vecteurs $s_{\xi} = (\xi, f(\xi))$ et $s_x = (x, f(x))$ associant dans un même vecteur v les composantes de coordonnées et de valeurs des échantillons étudiés et $\sigma_v =$

$\sigma_d = \sigma_r$. Ce σ_v correspond à la caractéristique de la fonction Gaussienne appliquée à notre signal considéré comme une variété. Notre filtrage bilatéral peut alors s'écrire :

$$h_v(x) = \frac{1}{k_v(x)} \int_{\Omega} f(\xi) g(\|v_{\xi} - v_x\|_2, \sigma_v) d\xi \quad (3.3)$$

Toujours avec notre dénominateur :

$$k_v(x) = \int_{\Omega} g(\|v_{\xi} - v_x\|_2, \sigma_v) d\xi \quad (3.4)$$

Dans cette nouvelle formulation, nous avons associé coordonnées et valeurs des éléments. Cette opération nous permet d'entrevoir le signal en tant que variété. En effet, en associant coordonnées et valeurs des échantillons, notre signal devient une variété de dimension n_c plongée dans un espace de dimension $n_c + n_v$. La distance que nous utilisons correspond en fait à la distance euclidienne associée à l'espace de plongement entre deux éléments de la variété.

Nous proposons de redéfinir le schéma de lifting en nous appuyant sur la distance géodésique et sur la pondération associée à la convolution introduite par le filtrage bilatéral.

3.1.2 Schéma de lifting pondéré

Le schéma de lifting, dont nous avons introduit le principe à la section 1.1.2, permet de traduire, à partir d'opérations simples, des filtres de convolution qui peuvent avoir un support assez important. Le schéma que nous proposons correspond à l'introduction du principe du filtrage bilatéral dans le schéma traduisant la transformée en ondelettes de Haar définie par Daubechies et al. [24] et le schéma de lifting traduisant la transformée en ondelettes de Cohen-Daubechies-Feauveau (2, 2) (Sweldens W. [61]) que nous noterons CDF par la suite. Ce schéma associé à la transformée en ondelettes de Haar correspond à (x_i étant un échantillon d'un signal 1D à la position i) :

$$\begin{aligned} x_{2i} &= x_{2i} - x_{2i+1} \\ x_{2i+1} &= x_{2i+1} + \frac{1}{2}x_{2i} \end{aligned} \quad (3.5)$$

La reconstruction étant définie en inversant l'ordre et le signe des opérations :

$$\begin{aligned} x_{2i+1} &= x_{2i+1} - \frac{1}{2}x_{2i} \\ x_{2i} &= x_{2i} + x_{2i+1} \end{aligned} \quad (3.6)$$

De son côté le schéma de lifting associé à la fonction d'ondelettes de Cohen-Daubechies-Feauveau (2, 2) se traduit par les étapes :

$$\begin{aligned} x_{2i} &= x_{2i} - \frac{1}{2}(x_{2i-1} + x_{2i+1}) \\ x_{2i+1} &= x_{2i+1} + \frac{1}{4}(x_{2i} + x_{2i+2}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Le schéma de synthèse correspond encore une fois à l'inversion de l'ordre et du signe des opérations de prédiction et de mise à jour. Nous pouvons considérer que ces deux schémas

de lifting sont l'expression simple d'un schéma de lifting géométrique plus général utilisant différentes formes de barycentre. La spécification la plus simple correspond au schéma associé à la transformée ondelettes de Haar. Elle confronte à l'échantillon réel en cours de calcul, l'échantillon réel auquel il est associé dans le schéma (couple d'échantillons pair - impair). Dans le cas du schéma de lifting traduisant la transformée en ondelettes CDF (2, 2), l'échantillon est à chaque fois confronté à un "échantillon virtuel" correspondant à la moyenne entre l'échantillon de droite et l'échantillon de gauche de l'échantillon en cours de calcul. Le schéma de CDF (2, 2) devient, si nous considérons que $m_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_{i+1})$:

$$\begin{aligned} x_{2i} &= x_{2i} - m_{2i} \\ x_{2i+1} &= x_{2i+1} + \frac{1}{2}m_{2i+1} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Cette formulation du schéma de lifting de CDF (2, 2) introduit deux aspects intéressants.

Le premier est la généralisation possible du schéma de CDF (2, 2) à tous les signaux réguliers (quelque soit leur dimension). En effet, le coefficient m_i étant la moyenne des échantillons les plus proches de l'échantillon en cours de calcul, il possède une interprétation immédiate quelque soit la dimension du signal. Cette transposition devra par contre nécessairement prendre en compte la décimation effectuée par l'ondelette paresseuse. Le schéma de lifting défini pour un signal 1D, peut se définir pour les images. Dans ce cas, notre barycentre se calcule à partir des 1-voisins (notation définie dans Andrés E. et al. [4]) : nous allons en effet utiliser des treillis quinconce pour la décimation du signal. Nous verrons tous ces aspects dans la section 3.6.

Le deuxième aspect est l'introduction de la pondération des éléments pour transposer le filtrage bilatéral dans le schéma de lifting. En effet, à la place de m_i nous allons utiliser b_i le barycentre des échantillons les plus proches de l'échantillon i en cours de calcul.

$$b_i = p(i, i-1)x_{i-1} + p(i, i+1)x_{i+1} \quad (3.9)$$

Les pondérations $p(i, i-1)$ et $p(i, i+1)$ (dont la somme est égale à 1) sont le moyen que nous avons pour introduire la distance géodésique. En effet nos deux pondérations correspondent à :

$$\begin{aligned} p(i, i-1) &= \frac{1}{d_g(i, i-1)} \left(\frac{1}{d_g(i, i-1)} + \frac{1}{d_g(i, i+1)} \right)^{-1} \\ p(i, i+1) &= \frac{1}{d_g(i, i+1)} \left(\frac{1}{d_g(i, i-1)} + \frac{1}{d_g(i, i+1)} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Avec ce barycentre notre schéma de lifting devient :

$$\begin{aligned} x_{2i} &= x_{2i} - b_{2i} \\ x_{2i+1} &= x_{2i+1} + \frac{1}{2}b_{2i+1} \end{aligned} \quad (3.11)$$

La mise en oeuvre de ce schéma mène à une transformée en ondelettes adaptatives puisque l'utilisation d'une distance induit la construction de fonctions d'analyse spécifiques à chaque indice i . Nous utilisons d'ailleurs dans nos notations uniquement

l'indice i afin de ne pas limiter nos définitions à un cas de figure : la distance se rapporte, suivant les cas, aux coordonnées de l'élément, à sa valeur et dans le cas que nous proposerons cela se rapportera même au sommet d'un graphe.

Pour transposer le filtrage bilatéral dans ce schéma de lifting géométrique, nous employons la distance euclidienne entre les valeurs des échantillons $d(i, j) = \|x_i - x_j\|_2$. La transposition ne permet pas, bien entendu, de transposer le filtrage bilatéral avec les gaussiennes c et s (formule (3.1)), pas plus qu'il est possible d'identifier directement c le noyau de convolution au schéma de lifting et s la pondération du noyau au barycentre employé dans notre schéma de lifting. Néanmoins, l'introduction de la distance dans notre schéma de lifting nous permet d'introduire le comportement très particulier du filtrage bilatéral dans un schéma de lifting.

Nous allons pour notre transformée proposer la distance géodésique pour calculer le barycentre b_i . Le but sera d'obtenir une meilleure prise en compte de la géométrie de l'image. Nous avons fait le choix d'une distance géodésique basée sur le graphe des k plus proches voisins de par son adéquation avec la modélisation de l'ensemble par une variété inspirée par la méthode de reconstruction de variété de Tenenbaum M. et al. [62].

Nous allons proposer tout d'abord un rappel de ce que la distance géodésique signifie dans le traitement d'images et quelques rappels sur les variétés.

3.2 Introduction de la distance géodésique

3.2.1 Distance géodésique en imagerie

La distance géodésique trouve plusieurs applications et définitions dans les domaines de l'imagerie et de l'informatique graphique. Elle permet par exemple de définir le chemin minimum connectant deux pixels d'une image dont les valeurs définissent les caractéristiques du milieu de propagation d'une onde lumineuse. Cohen L. D. [22] propose une interprétation physique des chemins minimaux correspondant au principe de Fermat de propagation de la lumière. Dans les milieux homogènes le front d'onde est régulier du fait de la propagation isotrope de ce front mais dans les milieux non homogènes ce front prend des formes plus complexes en fonction, par exemple, de frontières entre deux milieux impliquant des phénomènes de réfraction.

Le schéma (a) de la figure 3.1 montre le chemin le plus court de la lumière se propageant dans un milieu homogène. Du fait de la présence de deux milieux d'indice n_0 et n_1 , le chemin de l'image (b) entre les deux points peut ne plus être une droite. Le chemin suivi par la lumière (c étant la vitesse de la lumière dans le vide) entre les deux points p_0 et p_1 d'un milieu d'indice n dépend en fait de la minimisation de $T = \frac{1}{c} \int_{p_0}^{p_1} n(s) ds$ (voir également [22]).

Cette minimisation trouve des applications pour des problématiques que l'on rencontre dans l'imagerie et permet par exemple de construire différents outils comme des contours actifs dont l'énergie, associée à l'évolution du contour, sera fonction d'une interprétation de T : le contour est considéré comme un arc géodésique dont l'énergie est mesurée en

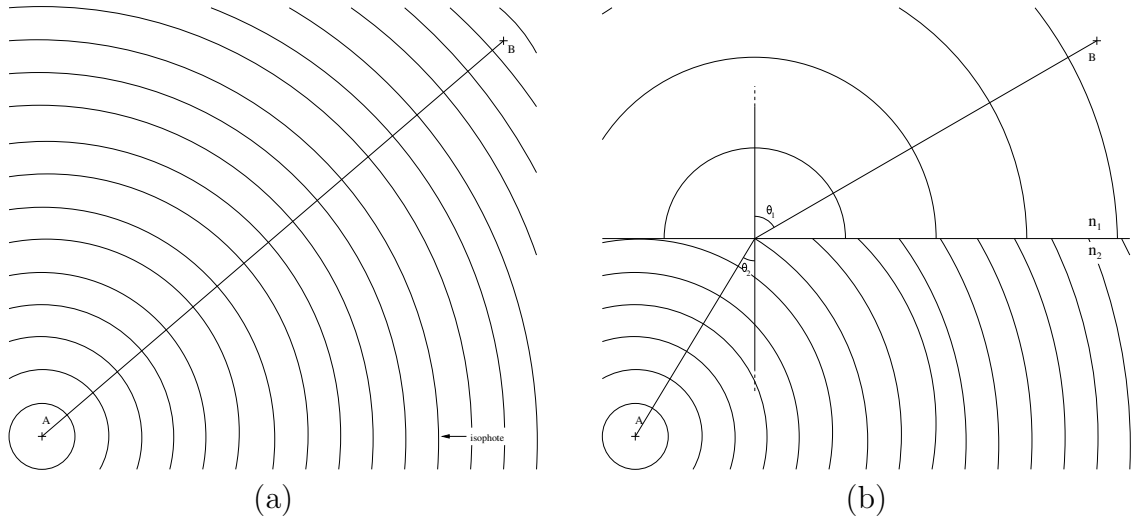


Figure 3.1: Plus court chemin emprunté par la lumière pour (a) un milieu homogène et (b) deux milieux d'indice n_1 et n_2 (d'où la loi de Snell-Descartes $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$).

intégrant $n(s)$. Cohen propose ensuite la détection de chemins entre pixels d'une image toujours à partir d'une minimisation de T . À travers la recherche du chemin dans l'image, c'est une recherche implicite d'un chemin dans l'objet lui-même qui s'opère. Les valeurs de l'image correspondent aux contraintes que l'utilisateur identifie sur l'objet étudié pour résoudre son problème. Bloch I. [8] applique également cette méthode pour des problèmes formulés à partir d'ensembles flous.

Ces exemples nous permettent d'entrevoir un aspect intéressant de ces distances : la réponse fournie par cette distance ne dépend pas seulement des deux éléments impliqués dans la mesure, mais bien de tout l'ensemble par lequel peut potentiellement passer le plus court chemin.

Ce comportement est issu de la manière dont est obtenue la distance : la résolution de la minimisation de la valeur du chemin exploite l'algorithme de Fast Marching [56]. Celui-ci propose de partir d'un des deux points mesurés et de rechercher T pour tous les pixels de l'image par propagation de voisins en voisins. L'algorithme obtient la réponse une fois l'information propagée jusqu'au deuxième point. Cette méthode, très proche de l'algorithme de recherche des plus courts chemins proposé par Dijkstra [27] que nous verrons par la suite (section 3.5), par sa propagation de voisins en voisins, illustre la nécessité d'associer une topologie à l'ensemble pour lequel nous souhaitons définir la distance géodésique. Coeurjolly D. et al. [20] proposent d'utiliser le concept de visibilité entre deux pixels pour construire la distance géodésique : il propose en quelque sorte une nouvelle vision de la topologie de l'ensemble. Il considérera deux pixels voisins si ils peuvent se voir : pas de pixel "obstacle" interceptant le rayon (ou segment) reliant les deux pixels dont on cherche la visibilité.

La distance géodésique que nous proposons d'utiliser est plus contraignante que celle

associée au Fast Marching car elle se base sur une topologie définie par le graphe des k plus proches voisins de l'ensemble des pixels. L'intérêt de cette topologie est son adéquation avec une modélisation du signal par une variété et en particulier elle remet en cause la topologie classiquement associée aux signaux qui se base uniquement sur les coordonnées des échantillons pour définir les relations de voisinage. Le choix de cette méthode ainsi que de l'algorithme de Dijkstra [27] pour obtenir au final la distance géodésique s'inspire de la méthode de reconstruction de variété de Tenenbaum M. et al. [62].

Avant de présenter cette distance, nous allons proposer quelques rappels sur les variétés afin de mieux comprendre ce que nous attendons en terme de comportement de cette distance.

3.2.2 Rappel des variétés

Comme nous l'avons déjà énoncé, la variété est une manière d'entrevoir les signaux en associant coordonnées et valeurs des échantillons dans un ensemble que nous appelons la variété dans un espace euclidien de dimension $n_c + n_v$ (toujours respectivement dimension de l'espace des coordonnées et de l'espace des valeurs des échantillons) tout en conservant un lien avec la structure de cet ensemble à travers l'espace des paramètres. Cela veut dire par exemple qu'une image en niveau de gris correspondra à une variété de dimension 2 plongée dans un espace euclidien de dimension 3. Avant de détailler les points que nous avons introduits dans cette dernière remarque, nous allons reprendre dans le domaine continu une définition des variétés proposée par Spivak M. [57] qui est :

Définition 3.2.1 *Une variété est un espace métrique M muni de la propriété suivante :*

Si un élément x appartient à M , il existe U un voisinage de x et $n \in \mathbb{N}$ tel que U soit homéomorphe à \mathbb{R}^n .

Pour reprendre les termes de Spivak lui-même, une variété est "localement" un espace métrique. Cela signifie que notre ensemble constituant la variété, inclut dans un espace donné, peut être identifié à un autre espace de dimension inférieure ou égale, par le biais de multiples fonctions, chacune décrivant localement la forme de l'ensemble.

De plus, comme nous allons travailler dans le domaine discret, nous utilisons un certain type de variétés prenant en charge la notion de support fini des fonctions : les variétés à bords. Ces variétés se composent en partie d'éléments (les éléments du bord) qui ne peuvent être associés par homéomorphisme à un espace métrique. Ces éléments seront alors associés à un demi-espace (par exemple $[0, \infty[\times \mathbb{R}$ au lieu de \mathbb{R}^2). Ces variétés à bords peuvent en particulier contenir plusieurs composantes connexes : nous reviendrons sur cette notion à travers une application dans le domaine discret et à l'occasion de rappels sur les graphes.

L'identification locale nécessite la construction d'un voisinage à chaque élément de l'ensemble étudié. Cette notion de voisinage correspond en fait à l'association d'une topologie à notre ensemble. La topologie est une notion définissant l'ensemble des sous-ensembles formés uniquement à partir des éléments de la variété et constituant nos voisinages. Ces

voisinages permettent l'identification de la variété à l'espace de dimension minimum que constitue l'espace des paramètres. Nous remarquons qu'en introduisant la topologie, ou plutôt en faisant le choix de modéliser le signal par une variété, nous introduisons la question de la connexité de cet ensemble. Nous reviendrons sur cette notion à l'occasion de rappels sur les graphes à la section 3.4.2.

L'identification est effectuée par une fonction définie sur le voisinage appelée carte de la variété. Le but de cette carte est de permettre l'identification d'une partie de la variété à un espace euclidien de dimension minimale. Par exemple, si le point de vue est suffisamment local, la surface d'une sphère peut être considérée plane. En d'autres termes, une surface quelconque plongée dans un espace 3D peut être identifiée, par le biais de ces cartes, à un plan. Chaque élément dans ce plan (espace des paramètres) est décrit à partir de coordonnées ayant uniquement 2 composantes. Cette identification peut être considérée comme un changement de système de coordonnées puisque chaque élément est décrit dans un nouvel espace. L'intérêt du système de coordonnées de l'espace des paramètres, par rapport à celui de l'espace de plongement, est qu'il est en général de dimension inférieure, et qu'il ne souffre plus des problèmes liés à la forme de l'ensemble (le plus court chemin dans une variété est un segment dans l'espace des paramètres).

Pour illustrer cette simplification par systèmes de coordonnées locaux, nous pouvons utiliser par exemple des cartes topographiques : une carte représente sur un support à deux dimensions des surfaces non planes. La localisation sur la carte ne souffre d'aucune ambiguïté puisque nous avons une correspondance unique entre un point de la carte et ce qu'il représente dans la réalité. Une carte est également beaucoup plus simple à appréhender que les données brutes : si nous devons travailler directement sur des coordonnées dans un espace euclidien 3D pour interpréter une carte, la difficulté serait tout autre. Cela illustre le fait qu'une surface, même si elle a une forme compliquée, peut être envisagée directement à partir d'une représentation 2D.

L'analogie proposée pour les cartes est tout à fait compatible avec la notion d'atlas que nous trouvons associé aux variétés : un atlas géographique, tout comme l'atlas d'une variété, est basé sur un ensemble de cartes. L'ensemble de cartes sera appelé atlas si il permet le recouvrement complet de la variété. En d'autres termes, l'atlas lie une famille de cartes à une variété en garantissant que tout les éléments de la variété sont pris en charge par au moins une carte de la famille : chaque élément de la variété possède un système de coordonnées locales.

Les concepts de cartes et d'atlas sont les outils qui permettent de définir une variété en particulier. Ils permettent de prendre en charge la "forme" de l'ensemble à travers les cartes. C'est cette "forme" en lien avec la topologie qui nous permet de considérer qu'en identifiant la variété, nous avons alors capté les caractéristiques géométriques de cet ensemble et notamment les potentielles composantes connexes.

Ces rappels nous permettent d'exposer les aspects que nous souhaitons exploiter avec les variétés. En particulier, nous nous intéressons à la distance géodésique correspondant à la longueur des arcs géodésiques de la variété. Cet arc correspond au plus court chemin entre deux éléments de la variété dont tous les points qui le composent sont inclus dans

la variété.

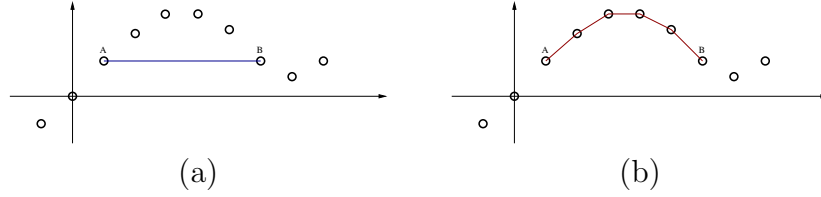


Figure 3.2: Distances de deux éléments d'un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 : (a) Distance euclidienne. (b) Distance géodésique liée à la variété formée par les éléments de \mathbb{R}^2 .

La figure 3.2 nous montre une variété 1D plongée dans un espace 2D et représentée par un sous-ensemble fini de ses éléments. La figure illustre la différence entre la distance associée à la variété et la distance associée à l'espace de plongement. Nous pouvons donc voir à travers la figure 3.2 le comportement qui nous intéresse pour la distance géodésique : cette distance prend en compte la configuration globale de la variété. En particulier, cette distance pourra être infinie si les éléments de la variété n'appartiennent pas à la même composante connexe.

Tous ces aspects associés à la description dans le domaine continu des variétés ne trouvent pas d'équivalent direct dans le domaine discret. Les notions d'arcs, de cartes et d'atlas ne sont pas transposables directement du domaine continu au domaine discret. Les voisinages permettant la définition de la topologie se trouveront par exemple composés d'un nombre fini d'éléments de la variété. Néanmoins le comportement que nous recherchons à travers les variétés restera présent dans le domaine discret : la distance géodésique entre deux éléments de notre signal, interprété en tant que variété, restera une distance prenant en compte le contexte et non simplement les deux éléments mesurés.

Nous allons maintenant chercher à exploiter cette qualité de description dans notre schéma de lifting. Toutefois nous allons tout d'abord présenter la manière dont nous allons définir une distance géodésique adaptée à l'image en cours de traitement. Cette définition nécessite la construction d'une topologie qui s'adapte à l'image en opposition à une topologie qui ne fait que transcrire l'échantillonnage régulier des signaux.

3.3 Topologie de la variété

Nous proposons donc la construction d'une topologie dont le but est de s'adapter aux singularités de l'image. En lien avec la distance géodésique qui en découle, cette topologie va nous permettre de prendre en compte la géométrie durant notre transformée en ondelettes.

Pour construire cette topologie adaptative, nous proposons de nous inspirer des travaux de Tenenbaum et al. [62] qui proposent d'utiliser le graphe des k plus proches voisins.

Après une brève présentation de ce graphe nous présenterons notre proposition s'appuyant sur la structure régulière des signaux.

3.3.1 Principe de l'algorithme

Nous allons considérer trois représentations de notre signal en lien avec la description de notre algorithme.

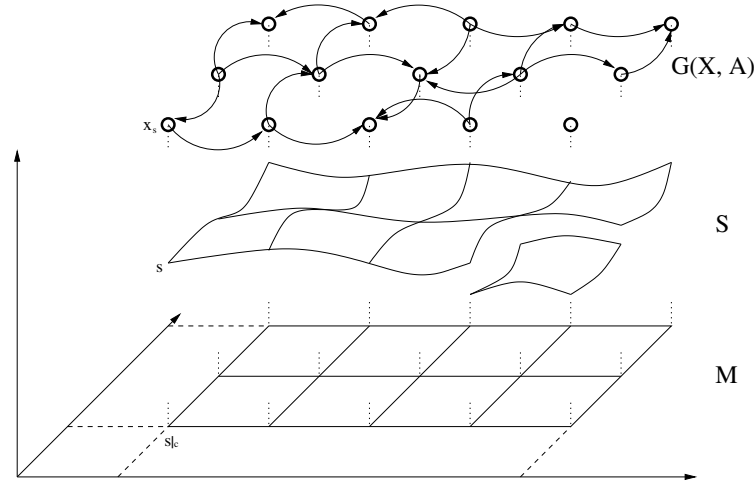


Figure 3.3: Superposition du maillage M , des données S et du graphe $G(X, A)$.

La figure 3.3 présente en illustration la "superposition" des trois ensembles qui permettent, de manière équivalente, de désigner un échantillon particulier (il existe une fonction de passage bijective entre tous ces ensembles).

Le premier (en haut) représente ce que nous cherchons à atteindre : notre topologie constituée par le graphe orienté $G(X, A)$ (le graphe des k plus proches voisins) dont les sommets X sont identifiés aux éléments de S , et les arcs A définissent les relations de voisinage entre échantillons. Par la suite nous nous conformerons aux notations et définitions tirées de Fournier [36] en ce qui concerne les aspects de la théorie des graphes.

Le deuxième représente les données sur lesquelles nous nous appuyons pour construire notre topologie : l'ensemble S de cardinal N correspondant à notre signal tel qu'il est défini dans l'espace de plongement mêlant valeurs et coordonnées des échantillons.

Le dernier, M , représente les coordonnées des échantillons, que nous utiliserons pour parcourir de manière adéquat notre ensemble S : c'est la structure régulière de notre signal sur laquelle nous allons nous appuyer pour accélérer les traitements. Paradoxalement, c'est cette structure que nous allons remettre en cause avec notre topologie.

Par la suite nous utiliserons également $\phi : X \mapsto S$ la fonction plongeant les sommets du graphe G dans l'ensemble S et nous emploierons la distance basée sur la norme L_2 de l'ensemble S pour déterminer les plus proches voisins. De même la notation $|_c$ sera employée sur les éléments de S lorsque nous souhaitons nous limiter aux coordonnées : elle est équivalente à la fonction de passage des éléments de S aux éléments de M .

Le principe de notre algorithme s'appuie sur le concept de "distance partielle" employé dans les algorithmes [55, 49]. Ces algorithmes s'appliquent à un nuage de points qui dans

le cadre de notre signal est identifié à S . Ils structurent S de telle manière que l'on puisse déterminer une distance minimum (distance partielle) entre l'élément dont le voisinage est en cours de construction et les éléments d'un sous-ensemble U de S . Si cette distance est supérieure à la distance du plus éloigné des voisins en cours, alors il n'est pas nécessaire de traiter les éléments de U .

Dans le cadre de nos tests nous disposons de M comme structure de l'ensemble. Nous allons exploiter cette structure pour déterminer la distance partielle entre s et t , deux éléments de S tels que :

$$\|s - t\|_p = \|s|_c - t|_c\|_2$$

et vérifiant :

$$\forall (s, t) \in S \times S, \|s - t\|_p \leq \|s - t\|_2$$

Nous allons ordonner les éléments de S de telle sorte que leur distance partielle à s_α soit croissante. Comme M est régulier, l'ordre de parcours de S relativement à s_α sera le même quelque soit s_α . Pour la construction de ce graphe sur des signaux de mêmes dimensions, par exemple les images couleur et niveaux de gris, nous pouvons construire ce parcours une fois pour toute. C'est en fait cette particularité qui fait tout l'intérêt de l'algorithme car nous économisons l'étape (la structuration) qui, par exemple dans l'algorithme [49]), est la plus coûteuse.

Supposons que cet ordre de parcours nous fournisse Δ , un ensemble ordonné selon la distance partielle à s_α , nous savons que si pour un élément de $\delta \in \Delta$ nous obtenons $\|s_\alpha - \delta\|_p > \|s_\alpha - u\|_2$ avec u le plus éloigné des k voisins en cours de s_α , alors tous les éléments de Δ situés après δ peuvent être éliminés de nos traitements.

L'algorithme 1 illustre la simplicité de la méthode une fois que nous obtenons le parcours Δ . Il existe plusieurs solutions pour obtenir Δ , et le temps de calcul qu'elles nécessitent a peu d'importance puisqu'il est possible d'enregistrer ce parcours pour l'utiliser pour toutes les images que nous aurons à traiter.

Nous allons maintenant vérifier avec des cas réels que notre algorithme constitue bien une accélération des algorithmes existants.

3.3.2 Comportement de l'algorithme

Nous allons proposer des tests pour illustrer le comportement de l'algorithme en fonction de N le cardinal de l'ensemble, k le nombre de plus proches voisins recherchés, et σ l'écart type des valeurs du signal. Nous utiliserons directement les coordonnées et l'intervalle $\llbracket 0, 255 \rrbracket^{n_v}$ pour les couleurs. L'intervalle de l'ensemble correspond donc à $\llbracket 0, 255 \rrbracket^{n_v} \times L \times H$ (avec L la largeur de l'image et H la hauteur de l'image).

Les deux premiers tests sur N et σ seront menés à partir d'images en couleur générées par un bruit blanc gaussien centré en 128 sur chaque composante. Ce bruit sera toujours centré en 128.

Algorithme 1 : Identifie les k plus proches voisins de s_α .

Entrées : s_α : élément de référence pour la recherche.
Entrées : Δ : ensemble S ordonné selon la distance partielle.
Sorties : K : l'ensemble des k plus proches voisins de s_α .
 /* Initialisation de K et de d_K . */
 1 $K \leftarrow K_i$; $d_K \leftarrow \max_{s_k \in K} \|s_\alpha - s_k\|_2$;
 /* Tant que la distance partielle est $> d_k$. */
 2 **tant que** $\exists s \in \Delta$ et $\|s_\alpha - s\|_p < d_K$ **faire**
 /* L'élément en cours est-il plus proche que les k voisins? */
 3 **si** $\|s_\alpha - s\|_2 < d_K$ **alors**
 /* Mise à jour de K . */
 4 $K \leftarrow K - \{\arg \max_{e \in K} \|s_\alpha - e\|_2\}$; $K \leftarrow K + \{s\}$;
 /* Mise à jour de d_K . */
 5 $d_K \leftarrow \max_{s \in K} \|s_\alpha - s\|_2$;
 6 **fin**
 7 **fin**
 8 **retourner** K ;

Nous utiliserons dans le cadre de notre test $N_o = 30$ occurrences formant l'ensemble des valeurs de test correspondant au couple (N, σ) . Les courbes que nous présentons correspondront donc à la moyenne de ces occurrences. Nous afficherons également autour de ces valeurs, l'intervalle dans lequel se situe 68 % des éléments puisqu'il correspond à $[v_m - \sigma_e, v_m + \sigma_e]$ avec v_m la valeur moyenne et σ_e l'écart-type de ces 30 occurrences.

La première courbe (figure 3.4) nous présente le nombre moyen de tests utilisés pour obtenir les 4 plus proches voisins d'un élément dans une image couleur construite à partir d'un bruit blanc gaussien d'écart type 10. La constance de ce résultat fonction de N semble confirmer la linéarité de l'algorithme face à N .

En ce qui concerne le comportement de l'algorithme en fonction de σ illustré par la courbe de la figure 3.5 (images de tests de format 512×512), le nombre d'itérations semble lié linéairement à l'écart type de l'ensemble. Le lien linéaire entre σ et le nombre moyen d'itérations exprime le fait que nous aurons un chemin effectif plus long à parcourir pour obtenir les plus proches voisins dans une zone texturée et/ou bruitée que dans une zone uniforme. La relation entre σ et v_m n'a pas un comportement exponentiel et permet donc d'envisager la recherche pour des ensembles de σ relativement important ce qui est plutôt intéressant du point de vue du temps de calcul.

À noter également que ce comportement de l'algorithme selon σ pourrait être détourné pour, à l'inverse, utiliser la construction du graphe des k plus proches voisins pour estimer l'écart type d'un signal. Cette estimation pourrait même être locale : l'écart type global est en relation avec le nombre moyen d'opérations pour identifier les k plus proches voisins d'un élément, nous sommes donc en droit de supposer que le nombre d'itérations se rapportant à un élément donné correspond à une notion d'écart type rapportée à ce seul

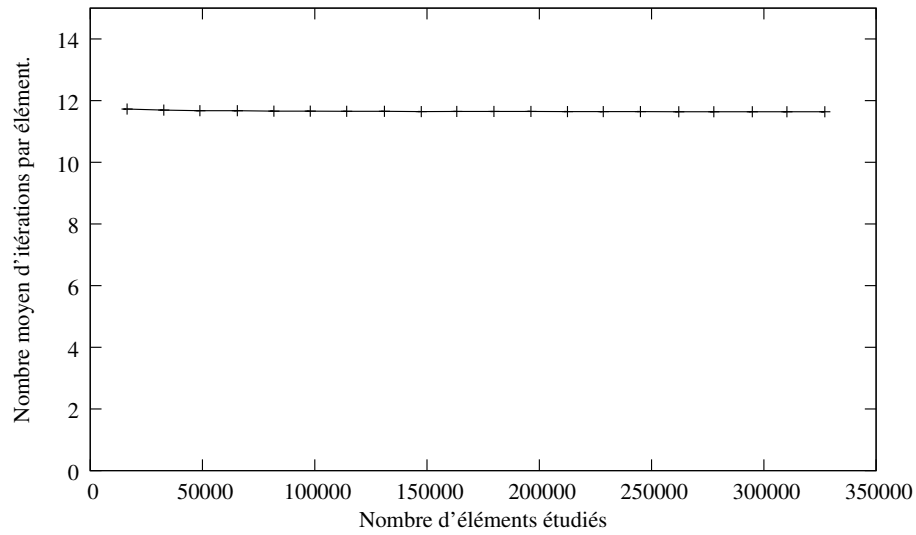


Figure 3.4: Comportement de l'algorithme en fonction de N .

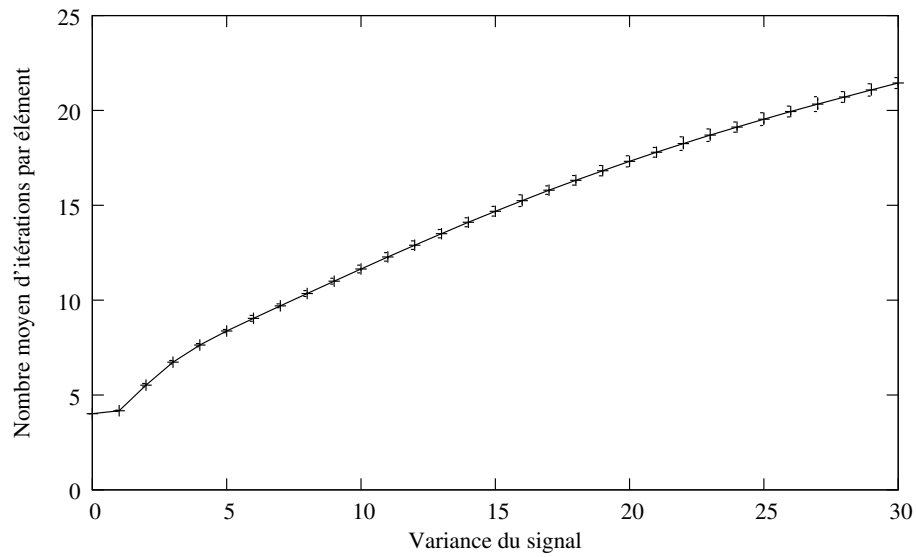


Figure 3.5: Comportement de l'algorithme en fonction de σ .

élément pour l'ensemble étudié.

Pour le dernier test nous utilisons les images Peppers, Splash et Mandrill puisque dans ce dernier test N et σ restent constants.

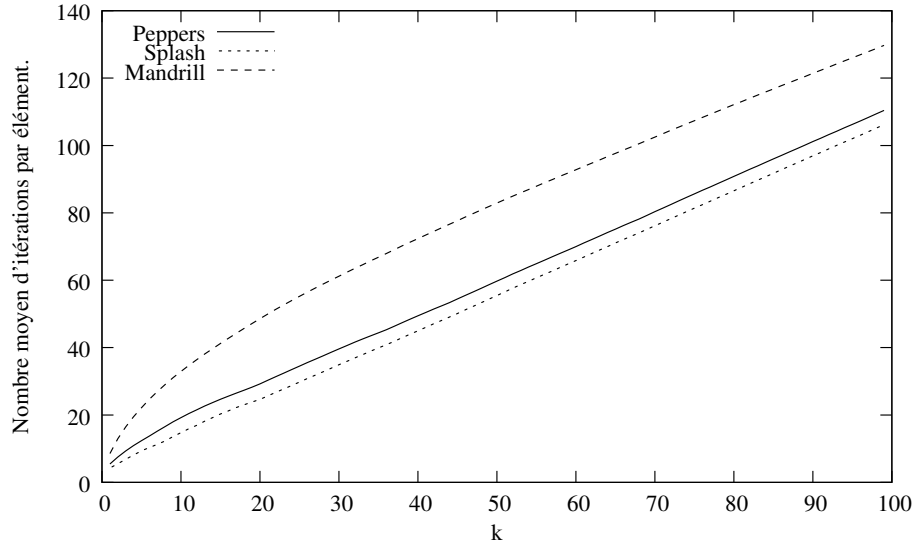


Figure 3.6: Comportement de l'algorithme en fonction de k .

Nous confirmons de par les premiers tests représentés par la courbe de la figure 3.6 que le comportement de l'algorithme dépend de k : en effet, nous avons par exemple avec l'augmentation de k une augmentation de $\max_{s_k \in K_i} \|s_\alpha - s_k\|_2$ qui, même dans le meilleur des cas, augmentera le nombre de tests. La relation entre k et le comportement de l'algorithme, définit une relation linéaire entre k et le nombre moyen d'itérations (les auto-corrélations des courbes sont respectivement pour Peppers, Splash et Mandrill, 0.99977, 0.99996 et 0.99280).

Enfin pour donner un ordre de grandeur du temps concret de l'algorithme, nous avons appliqué l'algorithme sur l'image¹ "Bridge" de grande taille puisque son format est 2749×4049 . La construction d'un graphe des 8 plus proches voisins demande 38 secondes. Ce temps est obtenu avec un Athlon 64 X2 4200+ à 2,20 GHz et 3Go de RAM pour 11 millions de pixels. Il est bien en dessous du temps de calcul proposé par [55] puisque les temps proposés sont par exemple, avec $k = 8$, 940 secondes sur un maillage 3D contenant 5 millions de sommets et 2657 secondes pour un objet de 14 millions de sommets, avec un processeur Xeon Quad Core et 1 Go de RAM. La méthode proposée par [49] ne semble pas obtenir de meilleurs résultats. Le matériel (publication datant de 2001) ainsi que les données utilisées ne nous permettent pas de proposer de comparaisons fiables. De plus l'ensemble des algorithmes que nous proposons pour nos comparaisons ne se limite pas à des signaux : ils s'appliquent à des nuages de points sans contraintes particulières. Toujours

1. Disponible à l'adresse http://www.imagecompression.info/test_images.

est-il que les résultats obtenus sont très encourageants dans le cadre spécifique des données organisées de manière régulière (correspondant à l'échantillonnage des signaux).

Le comportement de l'algorithme semble s'apparenter à une complexité $O(Nk\sigma)$. Notre application est actuellement conçue pour les images niveaux de gris et couleur. Nous n'avons donc pas étudié l'influence de la dimension pour notre algorithme, mais il pourrait être intéressant de connaître l'évolution de la complexité de la construction du graphe en fonction de la dimension du maillage et ainsi estimer son application à des données organisées par exemple selon 3 dimensions.

La méthode que nous proposons pour la construction du graphe des k plus proches voisins est assez rapide pour en permettre une utilisation pour des images de taille conséquente. Nous allons maintenant passer à l'exploitation de cette topologie adaptative pour permettre la construction des distances géodésiques.

3.4 Condition de l'obtention d'une distance

Notre travail sur la distance géodésique sera, à partir de maintenant, essentiellement basé sur le graphe $G(X, A)$. Nous rappelons que nous nous appuyons sur les définitions du livre de Fournier J.C. [36].

3.4.1 Graphes et distance

Après avoir appliqué la recherche des k plus proches voisins à l'ensemble S nous obtenons donc le graphe $G(X, A)$. Ce graphe est orienté, valué, strict et k -régulier. Il est dit orienté parce que tout arc $a \in A$ représente le lien d'un élément $s \in S$ à l'un de ses k plus proches voisins $s_k \in S$ sans garantir en retour l'existence d'un lien de s_k à s . Le graphe est valué car à chaque arc $a \in A$ est associée la distance $\psi(a) = \|\phi(x_1) - \phi(x_2)\|_2$ (distance euclidienne entre élément de S que nous désignerons maintenant à partir des sommets correspondants), x_1 et x_2 étant les sommets extrémités de a , par la fonction $\psi : A \mapsto \mathbb{R}$. Nous rappelons que nous avons défini à la section 3.3.1 la fonction ϕ comme étant la fonction de plongement des sommets de X dans l'ensemble S . Il est dit strict car il ne contient ni arc multiple ($\forall (x_1, x_2) \in X^2, \text{Card}\{a \in A, a = (x_1 x_2)\} = 0|1$), ni boucle (pour tout couple $(x_1, x_2) \in A, x_1 \neq x_2$). Enfin le graphe est k -régulier car chaque sommet est à l'origine de exactement k arcs.

Pour définir la distance géodésique à partir de ce graphe nous nous appuyerons sur la notion de chaîne d'un graphe :

Définition 3.4.1 *Une chaîne c d'un graphe $G(X, A)$ est une suite de la forme :*

$$c = (x_0, a_1, x_1, \dots, a_k, x_k)$$

où k est un entier positif, les x_i sont des sommets de G et les a_i des arcs de G tels que $\forall i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket, x_{i-1}$ et x_i sont les extrémités de a_i . L'entier k est la longueur de la chaîne.

La chaîne que nous venons de définir en association avec le graphe déjà calculé permet la construction sur le graphe de chaînes reliant deux points d'une variété en vérifiant deux conditions : la chaîne est construite uniquement à partir d'éléments de cette variété (les sommets étant assimilés à des éléments de S) et en respectant la topologie de la variété (les arcs du graphe sont une réalisation de la topologie de la variété). Les chaînes qui nous permettront de définir notre distance géodésique vérifient également les conditions qui en font des chaînes élémentaires.

Définition 3.4.2 *Une chaîne est dite simple si elle ne contient pas deux fois le même arc et élémentaire si elle ne contient pas deux fois le même sommet (la deuxième condition impliquant la première).*

Tout comme le segment est assimilable à la distance entre ses extrémités puisqu'il est le plus court chemin les reliant par exemple dans un espace euclidien, la plus courte chaîne élémentaire liant deux sommets du graphe correspondra donc à un arc géodésique et par conséquent au plus court chemin entre ces deux points dans un espace topologique. Si la distance géodésique correspond au plus court chemin entre deux sommets d'un graphe, il reste à donner un sens à ce chemin en lien avec le modèle associé à la variété que nous souhaitons représenter au moyen de ce graphe.

La longueur d'une chaîne est classiquement définie par le nombre d'arcs la composant. Pour tenir compte du modèle de variété nous proposons une interprétation différente de la longueur. Nous parlerons de la métrique de la chaîne par extension des valeurs des arcs. En effet, nous proposons d'exploiter la valeur des arcs plutôt que leur nombre :

Définition 3.4.3 *Soit un graphe $G(X, A)$ associé à ψ définissant la valeur des arcs et une chaîne $c = (x_0, a_1, x_1, \dots, a_k, x_k)$ de G reliant les éléments x_0 et x_k de X . La valeur de la chaîne c est :*

$$\psi(c) = \sum_{i \in \llbracket 1, k \rrbracket} \psi(a_i)$$

Nous allons noter $C(G, x_1, x_2)$ pour $(x_1, x_2) \in X \times X$, l'ensemble des chaînes élémentaires d'extrémités x_1 et x_2 construites sur le graphe G . À partir de la valeur donnée à une chaîne (définition 3.4.3) nous pouvons en déduire une application $X \times X \mapsto \mathbb{R}_+$ s'approchant d'une distance géodésique de la variété liée au graphe :

Définition 3.4.4 *Le plus court chemin entre x_1 et x_2 avec $(x_1, x_2) \in X \times X$, est :*

$$pcc(x_1, x_2) = \arg \min_{c \in C(x_1, x_2)} \psi(c)$$

Cette définition 3.4.4 nous permet de définir la "valeur" de la plus courte chaîne élémentaire du graphe reliant le point x_1 au point x_k en rapport avec la variété à laquelle le graphe est associé. Pour obtenir une distance, il nous est nécessaire d'obtenir un graphe orienté symétrique (correspondant à un graphe non orienté). En effet si l'on reprend la définition d'une distance :

Définition 3.4.5 Une distance est une application $d : E \times E \mapsto \mathbb{R}_+$ vérifiant, $\forall (x, y, z) \in E \times E \times E$ les propriétés :

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

Si la première condition est compatible avec la définition 3.4.4, et que l'application proposée est bien positive du fait que $\forall a \in A, \psi(a) > 0$, il n'est en revanche pas assuré que la deuxième condition sera respectée du fait que le graphe dont nous disposons jusqu'à présent n'est pas nécessairement symétrique.

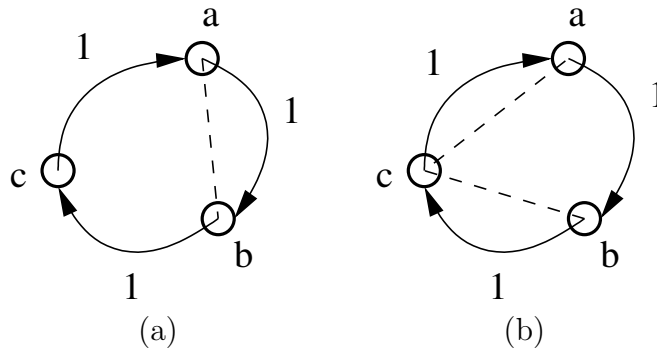


Figure 3.7: Incompatibilité de la notion de distance avec les graphes orientés : (a) $pcc(a, b) = 1$, (b) $pcc(b, a) = 2$. Les plus courts chemins sont représentés par les lignes en pointillés.

Le graphe de la figure 3.7 est un contre-exemple montrant que la définition d'une distance à partir d'un graphe orienté "quelconque" ne peut être garantie sans ajout de contraintes à la définition de ce graphe. La première contrainte concerne la structure du graphe et la deuxième, les valeurs des arêtes de ce graphe. Nous commençons par la structure :

Définition 3.4.6 Un graphe orienté strict est dit symétrique si pour tout arc (x, y) il existe également l'arc opposé (y, x) .

Si nous prenons un graphe orienté symétrique, nous nous assurons que la longueur du plus court chemin correspond effectivement à une distance. Si nous utilisons la valeur des chemins et non leur longueur ($\psi(c)$ au lieu du nombre d'arcs), nous devons vérifier que $\forall (a, b) \in X \times X, \psi((a, b)) = \psi((b, a))$. Les valeurs doivent confirmer la symétrie du graphe sans quoi les plus courts chemins ne seront pas nécessairement de même valeur suivant le sens de parcours.

La deuxième condition découle immédiatement de la symétrie du graphe : le plus court chemin de x_1 à x_2 est également le plus court chemin de x_2 à x_1 .

La troisième condition se vérifie facilement puisque si elle n'est pas vraie ($d(x, y) + d(y, z) < d(x, z)$), cela implique que le chemin utilisé pour calculer $d(x, z)$ n'est pas le plus court puisqu'il en existe un autre passant par y qui lui est plus court. En conclusion, nous devons construire un graphe strict, valué, non orienté à partir de notre graphe strict, valué, orienté et k -régulier. Nous verrons d'ailleurs par la suite que cette symétrisation de notre graphe s'accompagne de la perte de la k -régularité. Si c'est le cas, notre distance géodésique peut se définir de la façon suivante :

Définition 3.4.7 *Soit un graphe strict, non orienté, valué $G(X, E)$ et pour $(x_a, x_b) \in X^2$, $C(G, x_a, x_b)$ l'ensemble des chaînes élémentaires reliant x_a à x_b . Les arêtes du graphes sont valuées par l'application $\psi : E \times E \mapsto \mathbb{R}_+$. La distance géodésique de $\phi(x_a) \in S$ à $\phi(x_b) \in S$ est :*

$$d_g(\phi(x_a), \phi(x_b)) = \min_{c \in C(G, x_a, x_b)} \psi(c)$$

Dans le cas où il n'existerait aucune chaîne reliant x_a à x_b , $d_g(\phi(x_a), \phi(x_b)) = \infty$.

À noter qu'en passant à un graphe non orienté nous sommes passés de l'ensemble A des arcs à l'ensemble E des arêtes.

Pour obtenir la distance géodésique entre deux sommets du graphe, nous devons donc obtenir un graphe non orienté. Se pose alors la question de ce qu'implique le passage d'un ensemble d'arcs à un ensemble d'arêtes pour le graphe dans son ensemble : quelles implications a ce passage pour le comportement de la distance géodésique.

3.4.2 Construction du graphe non orienté

Nous allons proposer deux stratégies simples de construction d'un graphe orienté symétrique qui seront suivies d'une discussion sur les conséquences de cette symétrisation. Nous avons vu à la section 3.4.1 ce que nous entendons par graphe symétrique : le graphe devient au final un graphe strict, non orienté, valué. Les valeurs associées aux arcs sont les distances euclidiennes entre les éléments de S correspondant aux extrémités de l'arc. Donc, si ils existent dans le graphe orienté, deux arcs de mêmes extrémités et d'orientations opposées, ont nécessairement la même valeur. Ceci simplifie la construction du graphe non orienté à partir du graphe orienté puisqu'il nous suffit, soit de compléter chaque arc par son arc associé d'orientation opposée avec la même valeur, soit de supprimer les arcs qui dans le graphe ne sont pas associés à un arc opposé. Nous proposons quelques cas de figures pour montrer les conséquences de ces traitements sur la distance que nous obtiendrons par la suite.

Dans le cas d'élément au milieu d'une zone uniforme, la symétrisation ne change pas le graphe orienté. La figure 3.8 illustre ce cas où l'on constate que le graphe (formé à partir des 2 plus proches voisins) est déjà un graphe orienté symétrique et ne devrait donc pas changer. Ce cas de figure devrait être fréquent dans le cadre des images naturelles puisqu'elles sont constituées essentiellement de zones uniformes.

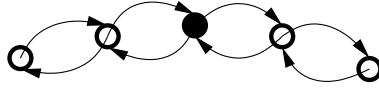


Figure 3.8: Configuration de graphe orienté (2 plus proches voisins) d'un signal 1D, pour l'échantillon • dans une zone uniforme.

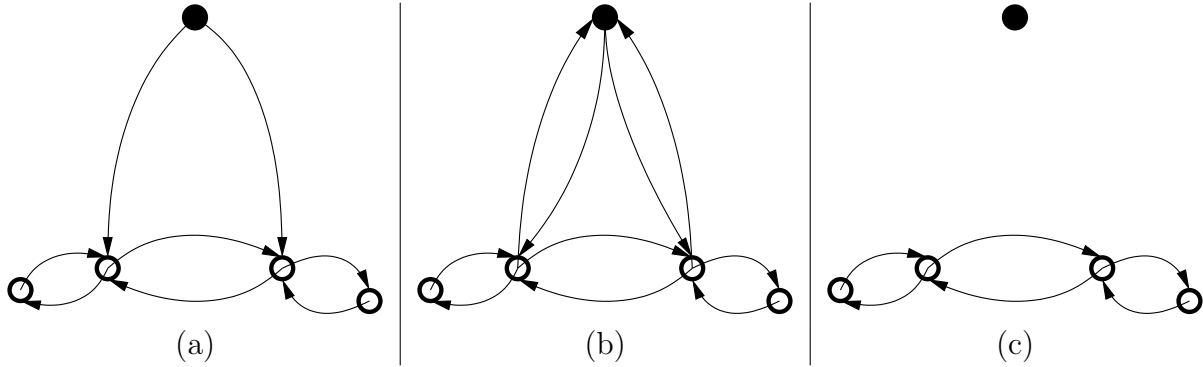


Figure 3.9: Configuration de graphe orienté (a) pour l'échantillon • isolé dans une zone uniforme. La symétrisation (b) par ajout d'arcs ne modifie pas les composantes connexes du graphe alors que la symétrisation (c) par suppression d'arcs va isoler l'élément dans une composante connexe.

Par contre, dans le cadre d'éléments isolés (figure 3.9), nous constatons que l'utilisation de la symétrisation apporte des réponses différentes suivant que l'on utilise l'ajout ou la suppression d'arcs. Nous constatons par exemple que dans le cadre de la symétrisation par ajout, l'élément isolé (valeur éloignée des éléments proches en ce qui concerne le maillage) se retrouve associé aux éléments de la zone uniforme alors que dans le cadre de la symétrisation par suppression d'arcs ce même élément se retrouve isolé. À noter que ce genre de configuration de sommets sans arcs ne pose aucun problème : toutes les distances géodésiques que l'on pourrait mesurer impliquant ce sommet seront infinies. Cette configuration synthétique peut être vue comme une illustration du comportement du traitement face à des éléments dans une zone bruitée. Dans une zone bruitée tous les éléments sont différents. Il y a donc une forte probabilité que nous soyons confrontés au même type de configuration de sommets qui, après symétrisation, n'ont plus du tout d'arcs incidents (arcs partant d'un autre sommet que • et pointant •).

La figure 3.10 représente un dernier cas où deux zones uniformes se retrouvent isolées par l'application de la construction du graphe de 2 plus proches voisins. La symétrisation, qu'elle soit par ajout (b) ou par suppression (c) changera effectivement l'ensemble de départ. Pour autant, l'influence de ce changement sera équivalent à la zone uniforme de la figure 3.8 : il n'y a pas de changement des composantes connexes du graphe. Ce cas de figure correspond en fait à nos fameuses singularités d'une image réelle que nous cherchons à prendre en compte avec notre graphe : la symétrisation n'aura donc pas une influence

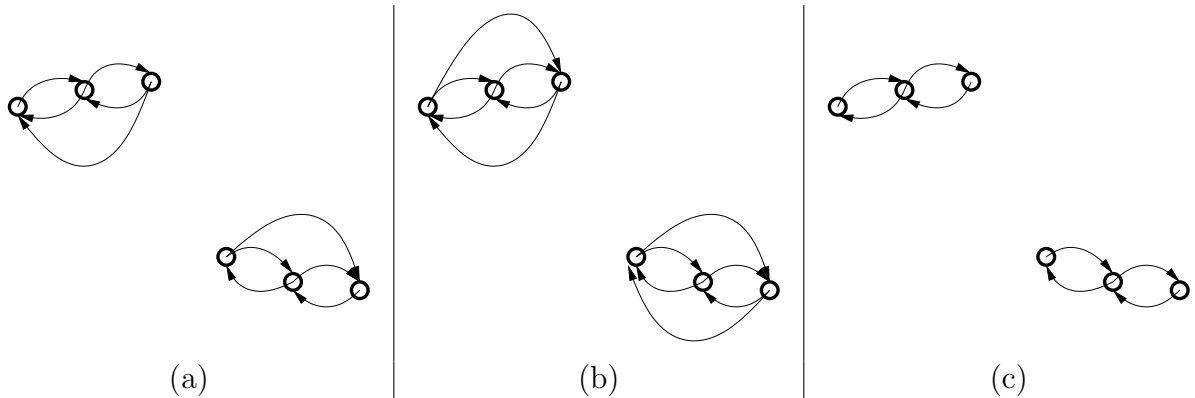


Figure 3.10: Configuration de graphe orienté (a) pour deux ensembles d'échantillons dissociés. Dans les deux cas (ajout (b) ou suppression (c) d'arcs) la symétrisation change la configuration du graphe, mais ne change pas de manière significative les distances impliquées (pas d'apparition de distances infinies supplémentaires).

trop importante sur cette prise en compte.

Toutes ces illustrations introduisent un aspect important de la prise en compte d'un voisinage différent lors de l'étude d'un signal : la topologie que nous construisons remet en cause la connexité de l'ensemble. Ramené au graphe représentant cette topologie, la connexité s'exprime de la façon suivante :

Définition 3.4.8 *Un graphe G est connexe si quelques soient deux sommets de ce graphe ils sont reliés par une chaîne.*

Elle introduit également la notion de composantes connexes :

Définition 3.4.9 *Les composantes connexes d'un graphe G sont les sous-graphes engendrés connexes maximaux (sous-graphes connexes de cardinal maximum).*

Suivant ces deux définitions (3.4.8) et (3.4.9) il apparaît donc que, dans les cas (b) et (c) de la figure 3.10, les deux opérations ne changent pas la connexité puisqu'il existe, après symétrisation, toujours des chemins pour lier chaque partie uniforme des deux côtés de la singularité.

Par contre dans le cas de l'échantillon isolé (figure 3.9) nous constatons que l'ajout d'arcs (b) conserve la connexité puisqu'il existe toujours une chaîne associant le sommet de l'échantillon isolé aux autres sommets du graphe alors que dans le cas de la suppression d'arc (c), l'opération supprime la possibilité de construire une chaîne allant d'un sommet du graphe vers le sommet de l'échantillon isolé.

Ce changement de connexité amène donc la construction de nouvelles composantes connexes. Illustrée sur un élément isolé, cette déconnexion peut également s'opérer sur des sous-graphes plus complexes à partir du moment où la connexité de ce sous-graphe

dépend uniquement d'arcs qui n'ont pas d'équivalent dans la direction opposée lors de la suppression par symétrisation. Cette apparition de composantes connexes amène l'apparition de distances infinies entre éléments de composantes différentes. Cette distance infinie est la conséquence la plus marquante du comportement très particulier des distances géodésiques par rapport à la distance euclidienne : les distances géodésiques ne dépendent pas seulement des deux éléments impliqués dans la distance mais bien de l'ensemble des éléments de la variété. En d'autres termes, la distance n'est pas uniquement fonction des deux éléments mesurés mais bien d'une configuration plus globale de l'ensemble étudié par rapport à ces deux éléments. C'est ce comportement que nous cherchons à mettre à profit pour la prise en compte de la géométrie de l'image (la configuration plus globale de l'ensemble étudié) dans notre transformée en ondelettes géométriques adaptatives.

Le choix entre l'ajout ou la suppression d'arcs pour la symétrisation du graphe dépend donc de l'application ; selon que nous voulons profiter de la création de composantes connexes amplifiant l'isolement de certains échantillons ou plutôt que nous souhaitons conserver les composantes connexes initiales. Dans notre cas nous avons opté pour la symétrisation du graphe par suppression d'arcs sans équivalent dans la direction opposée car nous souhaitons profiter de la remise en cause de la connexité pour mettre en valeur les singularités de l'image.

Nous avons donc à partir de cette étape un graphe orienté, symétrique, valué (en respectant la symétrie arc par arc), strict. Il n'est plus k -régulier puisque nous supprimons les arcs sans prendre en compte la conservation d'un nombre fixe d'arcs par sommet. Nous allons montrer comment, à partir de ce graphe, nous pouvons construire le plus court chemin s'appuyant sur la valeur des arcs et ainsi obtenir notre distance géodésique.

3.5 Recherche du plus court chemin

Nous avons donc défini un graphe associé à l'identification d'une variété correspondant au signal en cours de traitement. Nous nous sommes assurés que ce graphe vérifie les conditions voulues et en particulier la symétrie pour qu'à partir de ce graphe la définition 3.4.7 soit satisfaite et ainsi que soit possible le calcul des distances géodésiques. Cette définition se traduit dans les faits, toujours à partir de notre graphe valué de manière adéquate, par la recherche du plus court chemin selon l'algorithme de E. Dijkstra [27]. Nous allons présenter cet algorithme et proposer différentes modifications dans les conditions d'arrêt afin de permettre une adaptation aux contraintes liées à la transformée en lifting que nous utilisons (contraintes exprimées à la section 3.1).

Nous allons à partir de maintenant considérer que notre graphe est non orienté : nous utiliserons donc E à la place de A . La recherche du plus court chemin entre deux éléments d'un graphe s'effectue en construisant un arbre couvrant de $G(X, E)$ vérifiant une contrainte menant à notre distance.

3.5.1 Arbres couvrants

L'algorithme peut se définir comme la construction d'un arbre à partir d'un sommet initial x_i (l'un des sommets impliqués dans la distance géodésique en cours de calcul) et aboutissant à l'ensemble des chaînes élémentaires de poids minimum reliant ce sommet à tous les autres sommets de la même composante connexe du graphe.

Définition 3.5.1 *Un arbre est un graphe connexe et acyclique.*

En partant de cette définition nous pouvons énoncer plusieurs propriétés, telles que la relation entre le nombre de sommets N (cardinal de S) et d'arêtes M qui veut que $M = N - 1$, ou bien le fait qu'il existe au moins deux sommets de degré 1 (de plus amples détails dans le livre de Fournier [36]). Une des propriétés nous montre le lien direct qui s'opère entre les arbres et les plus courts chemins : dans un arbre, deux sommets quelconques sont reliés par une chaîne élémentaire unique. L'arbre peut être vu comme la construction simultanée d'un ensemble de chaînes élémentaires reliant le sommet initial de la construction aux autres sommets de l'arbre. L'idée est de faire en sorte que cette construction s'effectue pour des chaînes correspondant également au plus court chemin entre le sommet initial de la construction de l'arbre et les autres sommets de l'arbre.

Définition 3.5.2 *Une forêt est un graphe acyclique.*

La signification de cette simple définition implique que les composantes connexes du graphe acyclique formant la forêt ne sont ni plus ni moins que des arbres. Cette dénomination très intuitive nous permet d'entrevoir la configuration des arbres que nous pourrions construire à partir notre graphe. En effet, l'espace topologique que nous identifions ne garantit en rien la connexité du graphe. Nous pouvons très probablement être en présence de différentes composantes connexes et donc d'une forêt et non d'un seul arbre.

Définition 3.5.3 *Un arbre couvrant d'un graphe G est un graphe partiel de G qui est un arbre.*

Un graphe partiel de $G(X, E)$ est un sous-graphe $H(Y, F)$ couvrant (c'est à dire tel que $Y = X$). Notre arbre correspond donc à un sous-graphe contenant l'ensemble des sommets du graphe et $n - 1$ arêtes vérifiant la connexité des sommets. Une forêt formée uniquement d'arbres couvrants, qui de plus contient tous les sommets du graphe "à couvrir", est alors une décomposition en composantes connexes sous la forme d'arbres.

La détermination de la distance géodésique prend en compte la notion d'arbre couvrant : la distance n'aura de sens que pour des éléments de la variété se situant dans une même composante connexe. Dans le cas contraire, l'algorithme ne pourra pas construire un arbre incluant le sommet visé et par conséquent, une fois la composante connexe "couverte", si le sommet n'est pas atteint, nous considérerons la distance infinie.

Nous avons donc maintenant défini l'objet que nous allons construire pour calculer les distances géodésiques. Il nous reste à proposer une contrainte accompagnant la construction afin que les chaînes élémentaires uniques le constituant correspondent au plus court chemin entre les sommets extrémités de la chaîne. Nous allons donc introduire cette contrainte à travers la présentation de l'algorithme de Dijkstra.

3.5.2 Algorithme de recherche

Cette partie correspond à la solution que propose Dijkstra dans l'article [27] pour résoudre la recherche des plus courts chemins. Notre graphe étant devenu par symétrisation un graphe strict, valué, non orienté, nous utiliserons l'ensemble des arêtes E plutôt que celui des arcs A . Soit $G_{ac}(X_{ac}, E_{ac}, x_i)$ notre arbre couvrant d'une composante connexe $X_{cc}(x_i) \subset X$ résultat de la recherche menée sur le graphe $G(X, E)$ et initiée à partir du sommet $x_i \in X$ tel que, quelque soit $x \in X_{cc}(x_i)$ la chaîne élémentaire unique c reliant x_i à x vérifie : $d_g(\phi(x_i), \phi(x)) = \psi(c)$.

Pour mener la recherche, nous allons nous appuyer sur le fait que si il existe $x' \in X_{cc}(x_i)$ un élément du plus court chemin reliant x_i à x , alors la connaissance du plus court chemin reliant x_i à x implique la connaissance du plus court chemin de x_i à x' . L'idée est donc de construire les plus courts chemins issus de x_i dans l'ordre croissant selon ψ jusqu'à ce que l'arbre connecte x_i à x . Pour cela Dijkstra préconise de séparer les sommets de la composante connexe en trois ensembles :

- Les sommets de X_{ac} ;
- Les sommets de $X_{cand} \subset X_{cc}(x_i)$ candidats à l'arbre couvrant : ils sont reliés à l'un des sommets de X_{ac} par une arête ;
- $X_r = X_{cc}(x_i) \setminus (X_{ac} \cup X_{cand})$ le reste des sommets qui n'ont pas encore été traités.

Ces trois ensembles symbolisent le changement de statut des sommets durant la construction de l'arbre couvrant puisqu'il y a les sommets pour lesquels nous pouvons associer un plus court chemin, les sommets pour lesquels nous avons un chemin qu'il nous reste à confirmer étant donné qu'il est encore possible d'en trouver un plus court, et les sommets que nous n'avons pas encore connectés à x_i . De la même façon les arêtes formant ces chemins sont classées dans trois ensembles différents :

- Les arêtes de E_{ac} constituant l'arbre couvrant ;
- Les arêtes de E_c connectant les sommets candidats à l'arbre : si une extrémité de l'arête appartient à X_{ac} l'autre appartient à X_{cand} ;
- Le reste des arêtes E_r comprenant l'ensemble des arêtes éliminées durant la construction de l'arbre et les arêtes qu'il reste à tester.

Pour des raisons pratiques, les sommets de X_{ac} sont accompagnés de la valeur du chemin qui les relie à x_i . De même chaque sommet de X_{cand} est associé à la valeur du chemin le reliant à x_i . Cela permet des calculs plus rapides puisque, pour les sommets candidats, nous calculons la valeur du chemin en ajoutant la valeur de l'arête correspondante dans E_c .

L'algorithme se déroule en deux étapes que nous allons répéter jusqu'à ce que x appartienne à X_{ac} ou jusqu'à ce que tous les sommets de la composante connexe appartiennent à X_{ac} .

Dans l'état initial, tous les sommets sont dans X_r , et toutes les arêtes sont dans E_r .

Nous débutons la construction de l'arbre en transférant x_i de X_r à X_{ac} associé à un chemin de valeur égale à 0. Ensuite nous répétons les deux étapes suivantes, en considérant à chaque fois x_n le nouveau sommet ajouté à X_{ac} :

1. Nous considérons l'ensemble des arêtes dont x_n est une extrémité et connectant à

X_{ac} des sommets de X_{cand} ou X_r . Dans le cas où l'arête connecte x_n à un sommet $x_c \in X_{cand}$, nous vérifions si le nouveau chemin passant par x_n est plus court que celui déjà associé à x_c (puisque'il est candidat). Si il est plus long nous éliminons l'arête, sinon le nouveau chemin remplace l'ancien pour x_c (l'arête de E_c connectant x_i à x_c étant éliminée). Enfin si l'arête connecte x_n à un élément de X_r celui-ci est transféré à X_{cand} et l'arête à E_c .

2. Nous extrayons le sommet de $x_{min} \in X_{cand}$ associé à la plus faible valeur du chemin qui lui est associé. x_{min} est transféré de X_{cand} à X_{ac} , l'arête de E_c dont x_{min} est candidat est transférée à E_{ac} et $x_n \leftarrow x_{min}$. On reprend à l'étape 1.

Nous obtenons une complexité pour la construction qui dans le pire des cas (le graphe est connexe et les deux éléments mesurés sont les plus éloignés du graphe) correspond à $O(N \log N + M)$ avec N le nombre de sommets et M le nombre d'arêtes.

Comme nous l'avons précisé précédemment, nous arrêtons lorsque l'arbre atteint le sommet qui nous intéresse où lorsqu'il a entièrement couvert la composante connexe. Nous allons à présent introduire des éléments particuliers sur les conditions d'arrêt en lien avec les traitements que nous effectuerons par la suite pour notre transformée en ondelettes.

3.5.3 Conditions d'arrêt

Pour la suite nous aurons besoin de la distance géodésique d'un élément central à quatre autres éléments dans S . Ce choix des éléments correspond aux caractéristiques du schéma de lifting (voir section 3.6.1) : notre élément central sera par exemple un élément en cours de prédiction et les quatre autres éléments, les échantillons de parité opposée servant à ce calcul. Nous allons donc profiter du fait que l'arbre couvrant permet le calcul simultané de la distance à ces quatre voisins. Ce qui veut dire qu'une première modification de notre algorithme va être de prendre en compte cette recherche multiple durant la construction de l'arbre en définissant une condition d'arrêt imposant d'avoir trouvé les quatre distances avant d'arrêter la propagation de l'arbre.

Une deuxième modification de l'algorithme sera de prendre en charge les composantes connexes avant même de commencer le calcul d'une distance entre deux éléments. En effet, si les deux éléments ne sont pas dans la même composante connexe, nous considérons la distance infinie et nous excluons le sommet correspondant dans la construction de l'arbre. Ce cas de figure est avantageux en terme de calcul parce que l'identification des composantes connexes est relativement peu coûteuse et unique pour le graphe (cette décomposition ne doit pas être reconstruite pour chaque nouveau sommet comme l'arbre couvrant).

Pour limiter la complexité finale ($O(N^2 \log N + MN)$ dans le pire des cas) nous pouvons faire une concession sur l'exactitude de la distance géodésique : au-delà d'un certain seuil nous considérons que la distance est égale à ∞ et arrêtons la recherche. Cela limite la zone de recherche à un certain périmètre et restreint le nombre d'éléments testés dans

le pire des cas. Par contre, plus nous utilisons un seuil faible, plus nous appauvrissons l'information apportée par la distance géodésique.

3.5.4 Distances à l'échantillon central

Afin d'illustrer le comportement du calcul des distances géodésiques, nous proposons de construire une représentation des distances de tous les pixels d'une image à son pixel central. Pour représenter cette distance nous proposons d'utiliser une fonction quantifiant les valeurs des distances en les ramenant à l'intervalle $\llbracket 0, 255 \rrbracket$ par un modulo.

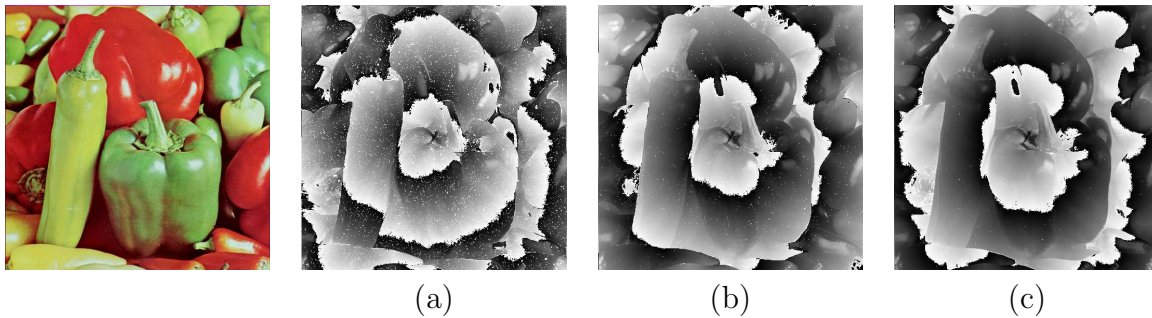


Figure 3.11: Exemple des distances géodésiques des pixels au centre de l'image Peppers. Les distances sont obtenues à partir d'une topologie correspondant à un graphe k plus proches voisins. (a) Pour $k = 4$. (b) Pour $k = 8$. (c) Pour $k = 16$.

Si nous reprenons la comparaison de Cohen L. D. [22] (section 3.2.1), nous pouvons assimiler les plus courts chemins à la propagation de la lumière dans un milieu non uniforme. Les ensembles de pixels associés à une même valeur sont donc les fronts d'ondes de cette propagation : le passage de 255 à 0, conséquence de l'utilisation de l'opérateur de modulo, est la version la plus visible de ce front d'onde. Nos images sont des milieux non homogènes de propagation d'une onde.

Nous voyons avec l'exemple de l'image Peppers de la figure 3.11 que ce front d'onde s'avère de plus en plus régulier, et son déplacement de plus en plus "rapide" si l'on augmente le nombre de plus proches voisins à l'origine de la topologie : plus k augmente, plus le front d'onde (passage blanc-noir) se propage rapidement du centre vers l'extérieur de l'image.

De même avec les images Mandrill (figure 3.12) et Splash (figure 3.13), nous constatons le même effet en fonction du nombre de voisins recherchés.

Nous constatons à travers ces trois exemples que la texture a pour conséquence des fronts d'ondes beaucoup moins réguliers que dans les zones uniformes et que les frontières de l'image produisent des phénomènes de "diffraction" : le front d'onde d'une zone est parfois concentrique sur un pixel différent du pixel central (choix du départ de la propagation dans nos exemples), seul passage concédé par le contours dans une zone donnée.

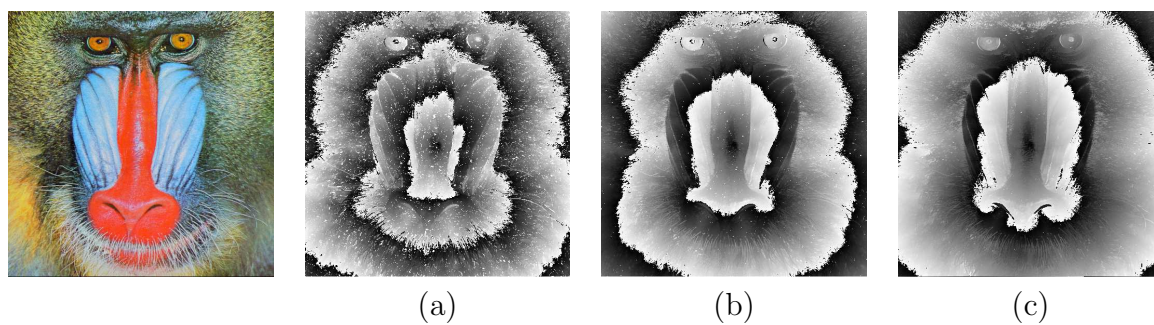


Figure 3.12: Exemple des distances géodésiques des pixels au centre de l'image Mandrill. Les distances sont obtenues à partir d'une topologie correspondant à un graphe k plus proches voisins. (a) Pour $k = 4$. (b) Pour $k = 8$. (c) Pour $k = 16$.

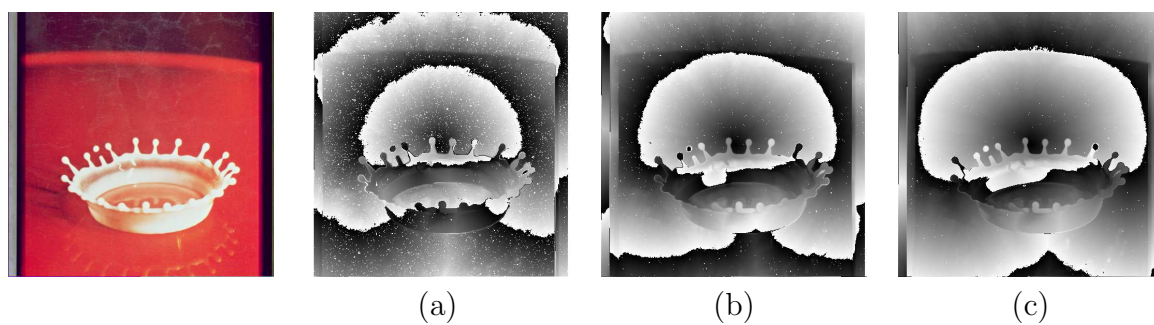


Figure 3.13: Exemple des distances géodésiques des pixels au centre de l'image Splash. Les distances sont obtenues à partir d'une topologie correspondant à un graphe k plus proches voisins. (a) Pour $k = 4$. (b) Pour $k = 8$. (c) Pour $k = 16$.

La conséquence sur le front d'onde est que parfois celui-ci est très en retard lorsqu'il passe d'un pixel à son voisin (voisin par rapport au maillage) situé de l'autre côté de la frontière.

Enfin nous constatons que plus notre topologie comprend de voisins, moins nos distances géodésiques tiennent compte des singularités de l'image. Nous pouvons expliciter cette idée à partir d'un cas simpliste de topologie. Si le nombre de voisins calculé pour obtenir la topologie était égal au nombre d'éléments dans l'ensemble moins un (le graphe associé à la topologie correspondant dans ce cas à un graphe complet) la distance géodésique serait équivalente à la distance euclidienne. Ce type de topologie reviendrait à ignorer complètement la forme de la variété : les arcs géodésiques ne dépendent plus de la configuration globale de l'ensemble puisqu'ils correspondent à des segments reliant directement les deux droites dans l'espace de plongement.

À partir de ces exemples nous constatons que nous avons une méthode rapide pour construire sur un signal échantillonné régulièrement, une topologie adaptée au signal vue en tant que variété. De cette topologie nous proposons d'exploiter l'algorithme de Dijkstra afin d'obtenir la distance entre échantillons fonction de la géométrie de l'image. Nous avons donc tous les éléments pour mettre en oeuvre notre décomposition adaptative.

3.6 Mise en oeuvre de la transformée

Nous allons dans cette partie définir les aspects se rapportant à la mise en oeuvre de notre schéma de lifting.

3.6.1 Décimation par treillis quinconces

La décimation des images à partir de deux treillis quinconces entrelacés est définie par Gouze A. et al. [37]. L'intérêt principale est de permettre une décimation par 2 et non par 4 de l'ensemble des échantillons. Elle est en fait plus adaptée à des transformées de type géométrique en partie pour la division par 2 du nombre de coefficients offrant une plus grande précision dans la montée en échelle et également parce que dans leurs conceptions, les schémas de lifting associés à cette décimation ne privilégient pas de directions particulières, si ce n'est par la prise en compte de la géométrie comme dans le cadre de la transformée définie par Chappelier V. et al. [18]. En effet, les schémas associés s'appuient sur une prédiction ou une mise à jour impliquant tous les voisins de l'échantillon en cours de calcul.

La figure 3.14 illustre deux treillis quinconces successifs. Nous remarquons en particulier que pour un échantillon de l'échelle paire, au centre de la figure, les plus proches voisins sont les 1-voisins définis par les flèches. Les schémas de lifting compatibles avec ce type de décimation sont, par exemple, conçus pour prendre en compte l'ensemble de 1-voisins lors de la prédiction ou de la mise à jour dans le schéma. Il existe également des schémas plus complexes prenant en compte des éléments au delà des 1-voisins, mais nous nous limiterons dans notre cas aux 1-voisins.

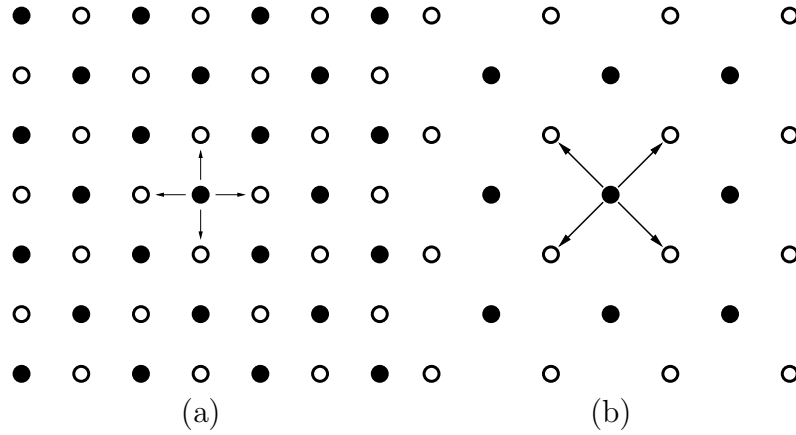


Figure 3.14: Deux treillis quinconces entrelacés d’une image avec (a) les treillis d’une échelle paire et (b) les treillis d’une échelle impaire.

Nous avons défini un schéma basé sur le schéma traduisant la fonction d’ondelette de Haar et sur un échantillon virtuel correspondant à la valeur du barycentre des 1-voisins de l’échantillon (de vecteur de coordonnées c_e) en cours de calcul. Si nous définissons l’ensemble de vecteurs de coordonnées des 1-voisins par $V(c_e) = \{c_e + (1, 0), c_e + (0, 1), c_e + (-1, 0), c_e + (0, -1)\}$ nous obtenons notre barycentre adapté à ce type de décimation :

$$b_{c_e} = \frac{1}{k(c_e)} \sum_{c_v \in V(c_e)} \frac{x_{c_v}}{d_g(c_e, c_v)} \quad (3.12)$$

Avec notre dénominateur :

$$k(c_e) = \sum_{c_v \in V(c_e)} \frac{1}{d_g(c_e, c_v)} \quad (3.13)$$

Notre barycentre b_{c_e} (défini par les formules (3.12) et (3.13)) exprime le barycentre classique que nous pouvons rencontrer en géométrie euclidienne si nous considérons que nos valeurs, qui ne sont autres que les valeurs des échantillons, sont les vecteurs positions de notre espace euclidien (en l’occurrence \mathbb{R}^{n_v}) et $\frac{1}{d_g(c_e, c_v)}$ le poids correspondant à chaque position. À noter que nous employons seulement \mathbb{R}^{n_v} et non S dans nos schémas de lifting car nous souhaitons, pour des raisons de simplicité, garder le maillage régulier au fur et à mesure de notre montée en échelle.

Étant donné l’utilisation de la distance géodésique ($d_g(c_e, c_v)$) dans notre schéma, nous devons à chaque échelle reconstruire le graphe des k plus proches voisins et mesurer les différentes distances géodésiques utiles à la transformée. En effet, la transformée en ondelettes, même adaptative, ne peut garantir la conservation de la topologie au fur et à mesure de la montée en échelle. Les coefficients d’ondelettes ou d’échelles, de la première échelle par exemple, sont chacun construits à partir d’un ensemble d’échantillons. La

topologie identifiée à une échelle semble donc difficile à assimiler directement à l'échelle supérieure. Nous recalculons donc notre topologie à chaque échelle.

Nous avons donc notre schéma de lifting nous permettant de construire une transformée en ondelettes géométriques adaptatives à échantillonnage critique. Nous allons maintenant définir la façon dont nous allons prendre en charge la confrontation du support de l'image avec nos fonctions d'ondelettes.

La gestion du support borné de l'image à partir de ce schéma, se fait sans périodisation, ni symétrisation du signal. Nous avons au cours de la définition de la distance géodésique, mis en évidence l'émergence de composantes connexes. Ces composantes conduisent à une distance infinie impliquant l'absence de prise en compte de l'échantillon associé à cette distance dans l'étape de prédiction ou de mise à jour. Ce mécanisme d'exclusion des échantillons n'appartenant pas au mêmes composantes connexes est également le mécanisme de prise en charge du support de l'image. Tout "voisin" de l'échantillon en cours de calcul, qui se situerait en dehors du support de l'image, se verrait attribuer une distance géodésique infinie.

Nous allons proposer maintenant une version non décimée de la transformée en vue d'application de restauration.

3.6.2 Transposition de l'algorithme à trous

Nous allons appliquer notre transformée pour des applications de restauration d'image. Nous proposons donc une version non décimée de notre transformée. Ce problème est étudié par [44] dans le cadre du lifting 1D. L'idée est de réinterpréter les étapes de prédiction et de mise à jour pour prendre en compte le fait que les échantillons ne sont plus séparés par l'étape de l'ondelette paresseuse et également que nous devons prendre en compte l'augmentation du support de la fonction traduite par le schéma de lifting. Pour rappel cette augmentation du support est effectuée en extrapolant la fonction initiale (de la première échelle). Cette extrapolation s'effectue en doublant à chaque monté en échelle la taille du support : la position i d'un coefficient de la fonction devient $2i$.

Dans le cadre de notre transformée appliquée à des images dont la décimation s'appuie sur des treillis quinconces, l'adaptation du schéma de lifting est relativement simple.

Étant donné notre schéma de lifting, les seuls éléments influencés par l'extrapolation des fonctions d'ondelette et d'échelle seront les échantillons permettant la construction du barycentre. Extrapoler le barycentre reviendra simplement à extrapoler les coordonnées des échantillons impliquées dans le calcul.

La figure 3.15 (a) illustre notre voisinage $V(c_e)$ que nous avons défini à la section 3.6.1 (c_e étant les coordonnées de notre échantillon en cours de calcul). La figure 3.15 (b) illustre le voisinage que nous allons définir pour l'échelle suivante. Nous allons maintenant passer à une formulation de ce voisinage prenant en compte l'extrapolation de la fonction d'échelle ou d'ondelette traduite par le schéma de lifting. Pour cela nous allons utiliser les parties réels \Re et imaginaires \Im de fonctions définies de \mathbb{N} dans \mathbb{C} . Nous allons nous appuyer sur la fonction ε traduisant la rotation et la dilatation associées à la montée en

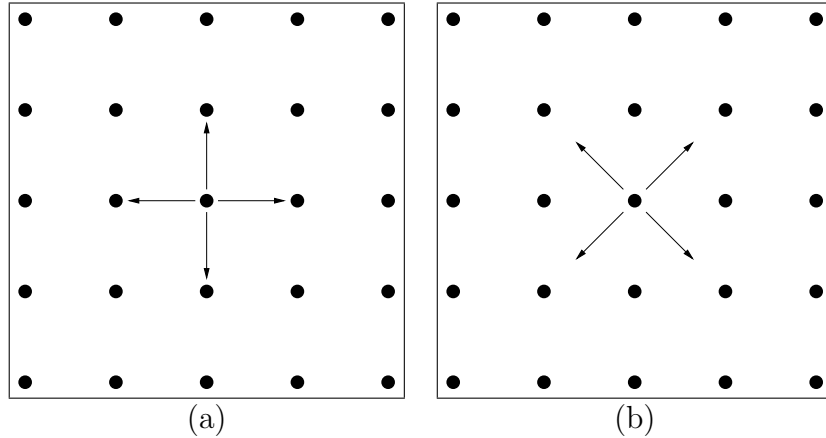


Figure 3.15: Positions (illustrées par les flèches) des échantillons impliqués dans le calcul du barycentre pour (a) la première échelle de la transformée et (b) la deuxième échelle de la transformée.

échelle ($n \in \mathbb{N}$) :

$$\varepsilon(n) = \left(2e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}$$

Pour ne pas alourdir la définition de V_n nous utiliserons la notation \mathcal{V} . Elle correspondra à une fonction $\mathcal{V} : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ qui, à un complexe c , associe le vecteur construit à partir de ses parties réels et imaginaires, tel que :

$$\mathcal{V}(c) \mapsto (\Re(c), \Im(c))$$

Nous allons à partir de ε et de la fonction \mathcal{V} définir les positions des éléments participant au barycentre de l'échantillon de coordonnées c_e en cours de calcul :

$$V_n(c_e) = \{c_e + \mathcal{V}(\varepsilon(n)), c_e + \mathcal{V}(\varepsilon(n)e^{i\frac{\pi}{2}}), c_e + \mathcal{V}(\varepsilon(n)e^{i\pi}), c_e + \mathcal{V}(\varepsilon(n)e^{3i\frac{\pi}{2}})\} \quad (3.14)$$

Nous avons donc une définition de notre barycentre, dans le cadre de notre transformée, adapté à l'algorithme à trous et toujours compatible avec les maillages quinconces entrelacés. Nous remarquons que cette formulation définit bien les échantillons pointés par les flèches dans la figure 3.15 (a) pour $V_0(c_e)$ et dans la figure 3.15 (b) pour $V_1(c_e)$ en prenant c_e les coordonnées du "pixels" au centre.

Cette adaptation de la transformée à une version non décimée induit que nous travaillons, pour chaque bande d'une échelle donnée, sur plusieurs treillis entrelacés correspondant aux 2^{n_e} différentes versions translatées de la transformée à une échelle donnée, avec n_e l'échelle en cours. Cela signifie qu'il ne faut pas considérer que les coefficients des différents treillis correspondent à la même variété. Nous devons prendre en charge cet aspect notamment lors de la construction de la topologie de la bande de fréquence basse à

une échelle donnée. Pour cela nous appliquons un isolement préalable des différents treillis afin d'interdire qu'un élément d'un treillis donné soit le voisin, par le graphe des k plus proches voisins, d'un élément d'un autre treillis.

Nous avons défini ainsi l'ensemble des choix que nous avons mis en oeuvre dans notre transformée que nous appellerons par la suite ondelettes géodésiques. Le but étant de servir au mieux l'objectif d'une transformée en ondelettes géométriques adaptatives. Nous allons maintenant étudier différentes applications pour illustrer le comportement de la transformée.

3.7 Comportement de la transformée

Nous avons fixé à quatre le nombre de plus proches voisins utilisés pour redéfinir la topologie de l'image. Ce choix s'appuie à la fois sur les tests de la construction du graphe de k plus proche voisins et de la distance qui en découle et sur l'idée que nous souhaitons profiter du comportement particulier de cette distance. Nous souhaitons notamment utiliser l'émergence de composantes connexes sans pour autant avoir trop de pixels isolés (pixels formant à eux seuls une composante connexe à part entière).

Afin d'illustrer le comportement de notre transformée nous allons maintenant étudier une application qui met en évidence la part de la géométrie dans le comportement de la transformée : la reconstruction partielle.

Nous allons donc, comme pour la transformée en bandelettes, tester l'application de reconstruction partielle afin de vérifier le comportement de la transformée face à une limitation de l'information disponible pour la reconstruction de l'image. Pour rappel, nous trions l'ensemble des coefficients d'ondelette, toutes échelles confondues, en fonction de leur énergie. Nous ne gardons que les n premiers coefficients (coefficients de plus forte énergie) en fonction d'un pourcentage fourni en paramètre. Nous avons choisi d'illustrer ce comportement avec deux images. Splash qui est très peu texturée et Mandrill qui est très texturée.

La reconstruction partielle de la figure 3.16 indique de très bons résultats (une amélioration de 8 en PSNR par rapport aux ondelettes classiques) et montre l'intérêt que peut offrir l'utilisation de notre transformée en ondelettes pour des images qui ne possèdent pas trop de texture. Nous remarquons notamment l'absence d'effet de Gibbs, et même la conservation du reflet que les ondelettes classiques ont complètement supprimé (en bas à droite dans l'image). Il serait même encourageant pour envisager des applications de codage si nous ne nous appuyions pas sur une géométrie aussi précise. En effet, chaque pixel est associé à quatre distances, ce qui est plus contraignant en terme de codage que l'image elle-même. Il serait intéressant d'étudier à l'avenir des moyens de résumer cette géométrie pour n'en garder que l'essentiel. Cela pourra se faire en quantifiant l'information, en identifiant les pixels de zones uniformes peu influencés par les distances géodésiques dans leur prise en compte par la transformée, ou d'autres modélisations de la géométrie de l'image qui pourraient mener à une distance géodésique moins précise mais suffisante pour définir des pondérations correctes dans notre schéma.

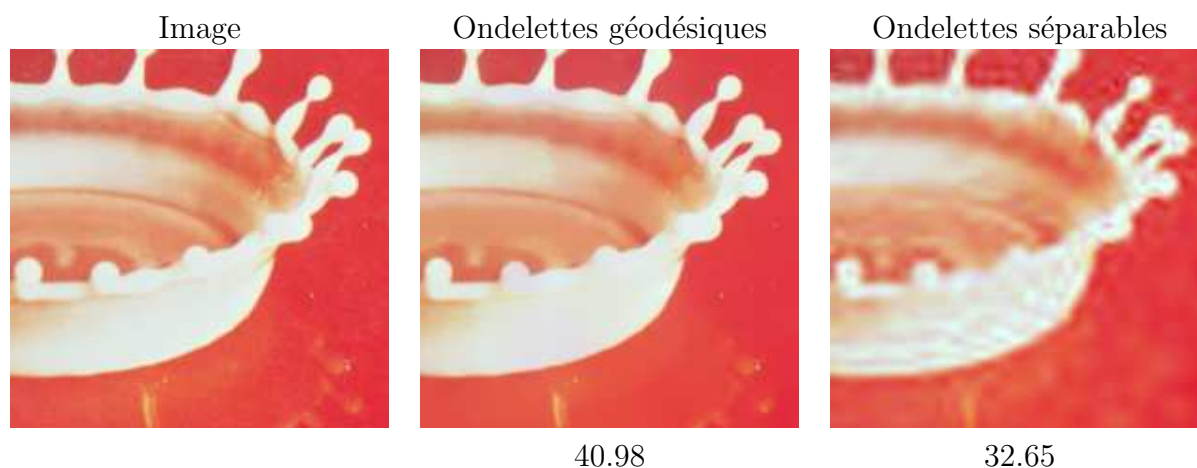


Figure 3.16: Reconstruction partielle de l'image Splash par ondelettes géodésiques et ondelettes séparables avec 1% des coefficients d'ondelettes. Le PSNR correspondant est indiqué sous chaque reconstruction.

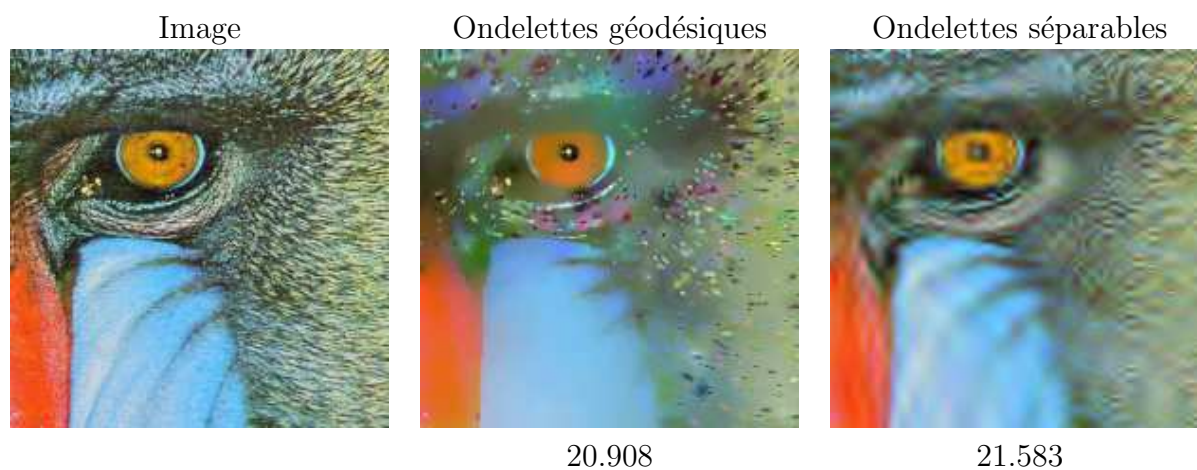


Figure 3.17: Reconstruction partielle de l'image Mandrill par ondelettes géodésiques et ondelettes séparables avec 1% des coefficients d'ondelettes. Le PSNR correspondant est indiqué sous chaque reconstruction.

Le deuxième test de reconstruction partielle illustré sur la figure 3.17 que nous proposons plaide moins en faveur de notre transformée et montre probablement les limites des approches géométriques. Du fait de la présence de texture en lien avec la suppression de 99% des coefficients d'ondelettes, plus assez de détails sont conservés pour permettre la restitution de toutes les "zones uniformes" de l'image. Le défaut de cette transformée est qu'en isolant chaque zone, elle la rend très fortement dépendante des coefficients codant spécifiquement cette zone. Si ces coefficients disparaissent, la zone est partiellement faussée. C'est également ce mécanisme qui permet d'obtenir un très bon respect des singularités. Un juste milieu serait peut être plus approprié pour le codage des images alors qu'une géométrie trop précise peut être handicapante. En particulier, il serait intéressant de modifier la géométrie pour qu'elle ignore les composantes connexes qui ne font qu'un seul pixel ou plus.

L'exemple 3.17 nous amène une autre réflexion concernant l'apparition de fausses couleurs de manière assez importante dans l'image. De par l'utilisation d'un centre de gravité, la normalisation du filtre est assurée sur le modèle du filtre CDF (2, 2).

Nous avons donc, avec ces deux exemples, deux cas de figures menant à un comportement contradictoire de la transformée en ondelettes géodésiques. Mais le résultat sur une image avec peu de texture est très encourageant. Nous allons maintenant donner rapidement deux résultats, toujours pour illustrer le comportement de la transformée, en lien avec la prise en compte de la géométrie.

Intervertir les géométries

Pour ce test nous allons tout simplement effectuer la transformée en ondelettes géodésiques sur deux images de même format et reconstruire ces images en intervertissant les géométries.

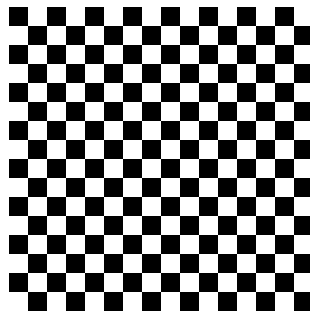


Figure 3.18: L'image synthétique Damier qui va servir à nos tests.

Afin de mettre en valeur l'influence de la géométrie dans le processus de test, nous avons donc construit une image très simple de damier (figure 3.18). Elle fera émerger deux composantes connexes de par la prise en compte de la géométrie (les cases blanches pour l'une et les cases noires pour l'autre).

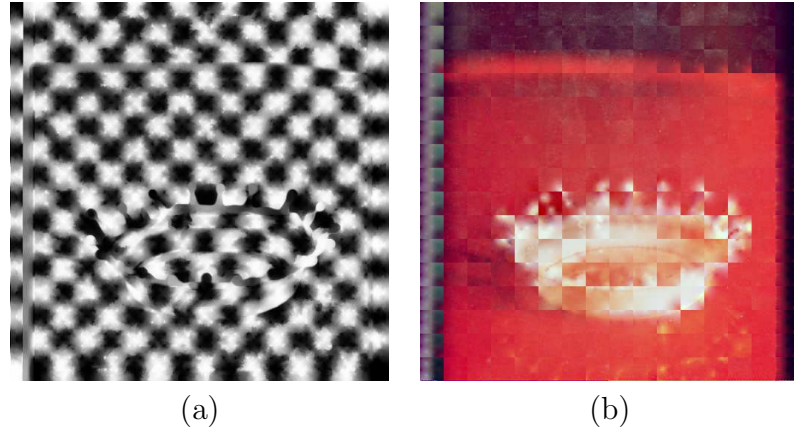


Figure 3.19: Image de Damier et l'image réelle Splash de notre premier test. (a) Utilisation de la géométrie de l'image Splash et des coefficients d'ondelettes de l'image Damier. (b) Utilisation de la géométrie de l'image Damier et des coefficients d'ondelettes de l'image Splash.

Dans la figure 3.19 nous avons intégré la géométrie de l'image Splash aux coefficients de l'image Damier et inversement. Nous constatons dans les deux cas que les coefficients d'ondelettes conservent une partie de la structuration de l'image du fait de la position des coefficients. Néanmoins, sans la géométrie, les coefficients ne suffisent plus à définir l'image. Nous voyons par exemple dans l'une des cases du damier 3.19 (b) que si nous prenons la reconstruction de Splash, le contour est dilué.

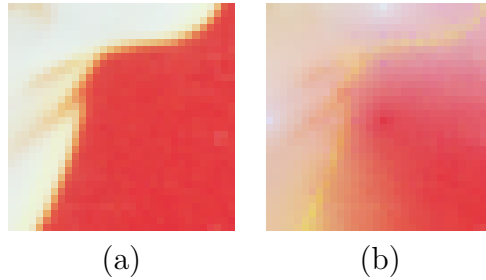


Figure 3.20: Zooms correspondant à une case du damier. (a) Zoom appliqué à l'image Splash. (b) L'image mixant coefficients d'ondelettes de l'image Splash et géométrie de l'image Damier.

Nous voyons avec les parties de l'image Splash (image 3.19 (b)) que nous avons, avec une géométrie de zones uniformes, complètement perdu la précision de la localisation des contours. De par l'utilisation de la géométrie de l'image Damier, cette localisation des contours est trompée au point de complètement mélanger les données de part et d'autre du contour. Nous retrouvons ce phénomène dans l'image 3.20 (b) : les couleurs qui dans l'image 3.20 (a) se trouvaient de part et d'autre du contour se retrouve ici mélangées.

L'image 3.21 est un autre exemple intervertissant cette fois la géométrie des images

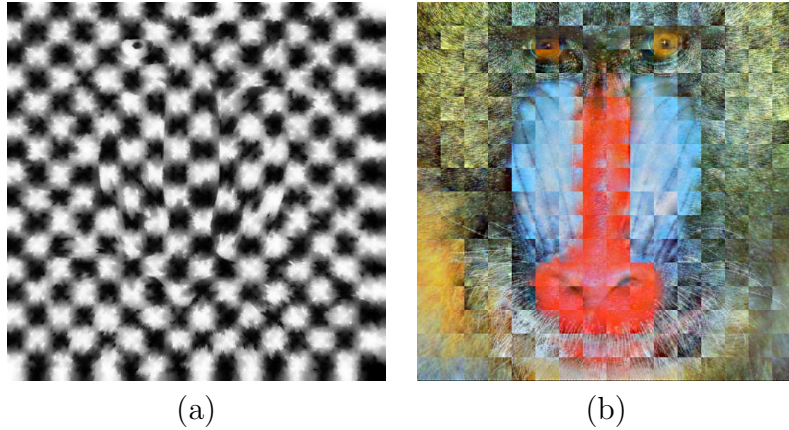


Figure 3.21: Image de Damier et l'image réelle Mandrill de notre premier test. (a) Utilisation de la géométrie de l'image Splash et des coefficients d'ondelettes de l'image Damier. (b) Utilisation de la géométrie de l'image Damier et des coefficients d'ondelettes de l'image Mandrill.

Damier et Mandrill. Nous voyons encore une fois que la localisation des coefficients permet de reconnaître l'image dont nous utilisons les coefficients pour la reconstruction mais que c'est la géométrie qui permet de précisément définir les singularités.

Nous avons donc à partir de ces quelques résultats une idée de la part des coefficients d'ondelettes et de la géométrie dans la description de nos images à partir de la transformée en ondelettes géodésiques. Nous allons maintenant présenter les applications en restauration d'image.

3.8 Application à la restauration d'image

Nous allons, comme dans le cas de la transformée en Bandelettes, confronter la transformée géodésique aux applications de restauration d'image pour le débruitage et la suppression d'effet de blocs.

3.8.1 Application au débruitage

Le débruitage que nous proposons s'appuie sur la version non décimée de la transformée que nous avons décrite à la section 3.6.2 avec la même estimation du seuil que pour la transformée en ondelettes séparables. Cette estimation s'appuie sur l'écart-type des coefficients d'ondelettes à la première échelle. Le seuillage que nous avons choisi dans le cadre de cette application est le seuillage dur.

Nous allons tout d'abord discuter nos résultats à partir des images Metaballs (image synthétique), Splash (image réelle peu texturée) et Mandrill (image réelle texturée). Nous finirons par un ensemble de tests que nous détaillons dans les tableaux 3.2, 3.3, 3.1.

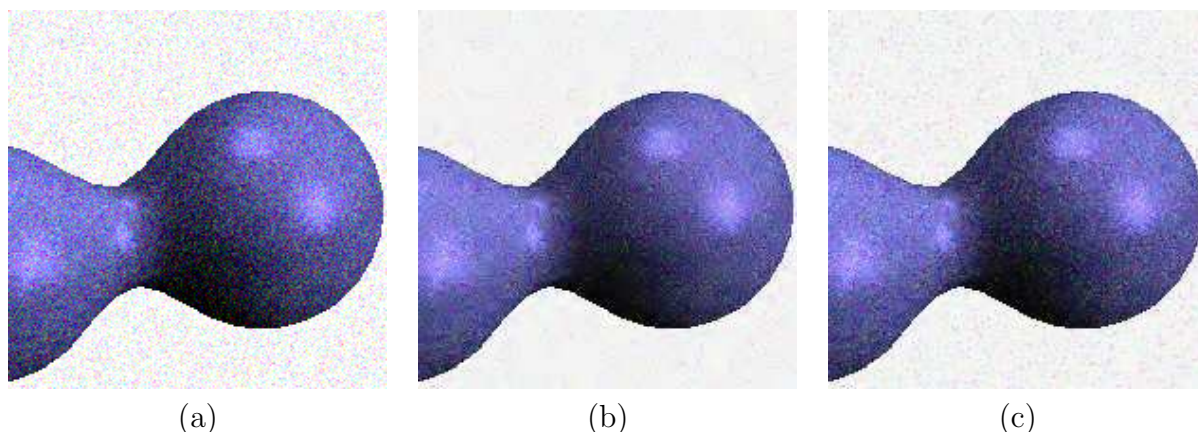


Figure 3.22: Débruitage sur l'image Metaballs. (a) L'image bruitée. (b) Transformée en ondelettes séparables non décimée PSNR = 24.1155 dB. (c) Transformée en ondelettes géodésiques PSNR = 23.2342 dB.

La première image testée Metaballs (figure 3.22) conduit à des résultats plutôt en faveur de la transformée en ondelettes classiques : la transformée en ondelettes géodésiques fait apparaître des points sur les zones uniformes un peu à la manière d'un bruit poivre et sel.

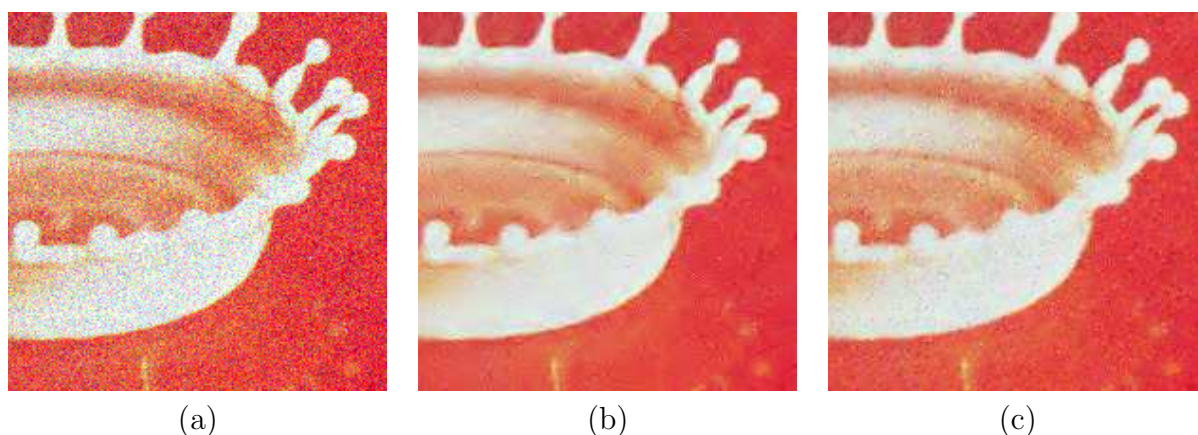


Figure 3.23: Débruitage sur l'image Splash. (a) L'image bruitée. (b) Transformée en ondelettes séparables non décimée PSNR = 26.6779 dB. (c) Transformée en ondelettes géodésiques PSNR = 25.6909 dB.

L'image Splash (figure 3.23) donne les mêmes résultats que pour l'image précédente. Nous remplaçons un bruit blanc gaussien par un bruit poivre et sel. La conservation des contours est par contre meilleure si l'on considère l'absence totale d'effets de Gibbs (frontière blanc/rouge de la goutte pas toujours nette pour le résultat avec la transformée en ondelettes non décimée).

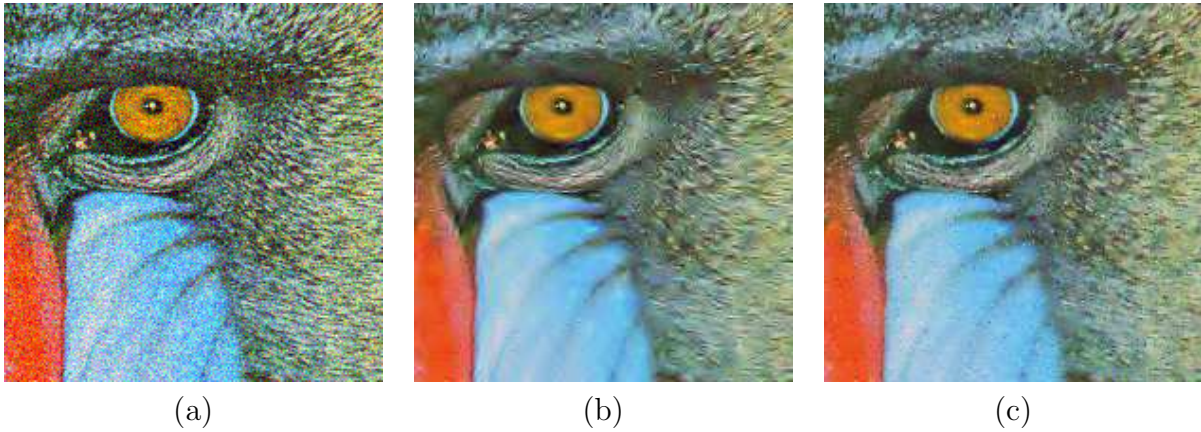


Figure 3.24: Débruitage sur l'image Mandrill. (a) L'image bruitée. (b) Transformée en ondelettes séparables non décimée PSNR = 22.5679 dB. (c) Transformée en ondelettes géodésiques PSNR= 22.2667 dB.

L'image Mandrill (figure 3.24) conduit encore une fois à un bruit poivre et sel dans le cadre du débruitage par ondelettes géodésiques et encore une fois les contours sont mieux conservés (la frontière très marquée délimitant le nez ne souffre pas de l'effet de Gibbs).

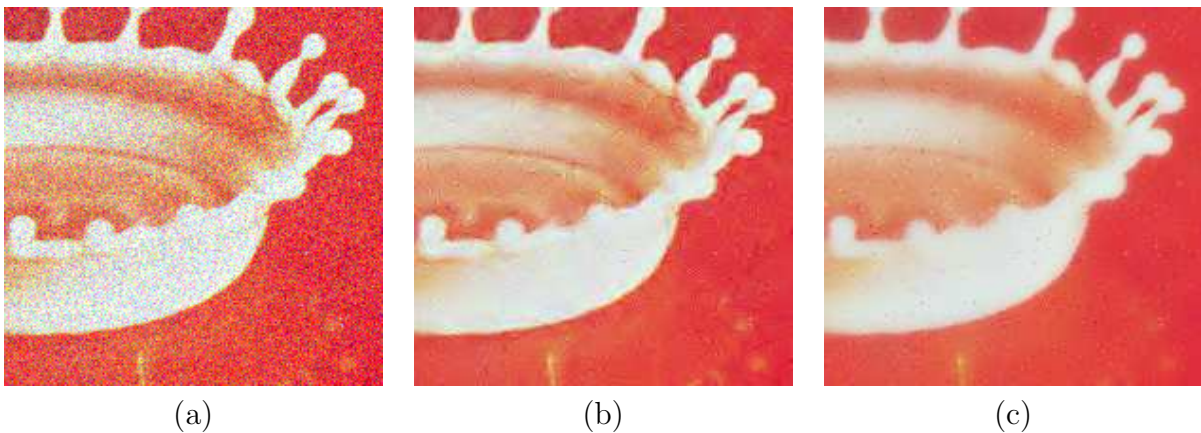


Figure 3.25: Débruitage avec augmentation de seuil sur l'image Splash. (a) L'image bruitée. (b) Transformée en ondelettes séparables non décimée PSNR = 26.6779 dB. (c) Transformée en ondelettes géodésiques PSNR = 28.3384 dB.

Encore une fois nous avons multiplié le seuil en considérant que la meilleure conservation des contours nous permet de supprimer un peu plus de coefficients. Nous pouvons voir avec le résultat sur l'image Splash (figure 3.25) que nous avons, grâce à cela, une amélioration de la qualité visuelle puisque nous diminuons le bruit poivre et sel restant après restauration tout en conservant les contours préservés de l'effet de Gibbs.

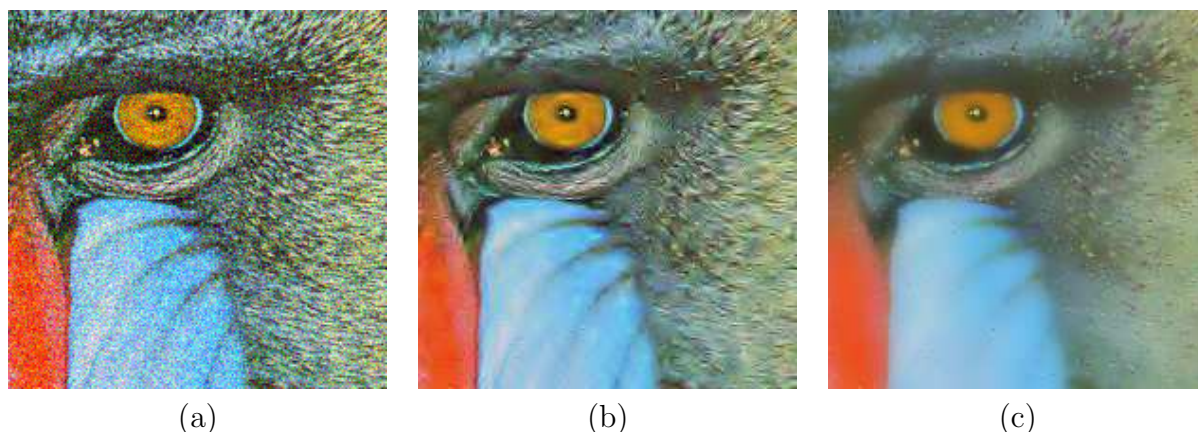


Figure 3.26: Débruitage avec augmentation de seuil sur l'image Mandrill. (a) L'image bruitée. (b) Transformée en ondelettes séparables non décimée PSNR = 22.5679 dB. (c) Transformée en ondelettes géodésiques PSNR = 20.773 dB.

Le résultat obtenu sur l'image Mandrill (figure 3.26) est quand à lui moins convaincant au niveau de la qualité visuelle et du PSNR. La restauration permet bien de supprimer le bruit et conserve les contours. Par contre elle supprime l'essentiel de la texture. Il y a dans ce cas une confusion pour notre transformée entre le bruit et la texture. Le résultat obtenu sans multiplication est pour le coup meilleur si on privilégie la conservation de la texture.

Les résultats de débruitage par ondelettes géodésiques présentés dans les tableaux qui suivent sont tous obtenus avec une multiplication du seuil par 1.2 afin de tester la prise en compte de la géométrie.

Les résultats de la première base d'images (tableau 3.1) ne sont pas meilleurs : ils sont régulièrement inférieurs et les améliorations ne dépassent jamais 1dB. Nous expliquons cela par le type de motifs qui se prête mal à notre transformée. De plus, l'ensemble de la base est constituée d'image en niveaux de gris : nous soupçonnons la distance géodésique d'avoir une efficacité réduite sur ce type d'image.

Le deuxième tableau (tableau des images de textures 3.2) de résultats de PSNR montre une amélioration quasi systématique et parfois très nette pour la transformée en ondelettes géodésiques. L'amélioration est régulièrement proche, voir supérieure à 3 dB. Nous noterons que toutes les images de cette deuxième base sont en couleurs.

La dernière base d'images (images naturelles 3.3) est constituée d'images en niveaux de gris et en couleurs. Encore une fois, les résultats obtenus montrent une amélioration du PSNR pour les images couleurs et des résultats mitigés pour les images en niveaux de gris. Ils confirment le comportement constaté sur les deux tableaux précédents.

L'ensemble des PSNR obtenus semblent montrer une certaine amélioration du comportement de la transformée dans le cadre d'un débruitage des images couleurs. Les résultats sur les prises de vue aériennes sont à ce propos plutôt encourageants (voir tableau 3.2).

CHAPITRE 3. ONDELETTES ET DISTANCE GÉODÉSIQUE

Image	n_c	Format	Ondelettes	Géodelettes	Image	n_c	Format	Ondelettes	Géodelettes
1.1.01	1	512x512	20.8742	20.6121	1.1.02	1	512x512	22.9494	23.12
1.1.03	1	512x512	22.3009	22.3004	1.1.04	1	512x512	22.8684	23.2254
1.1.05	1	512x512	23.5749	24.0923	1.1.06	1	512x512	21.4184	21.6893
1.1.07	1	512x512	23.2719	23.7951	1.1.08	1	512x512	25.4958	25.4135
1.1.09	1	512x512	24.7452	24.072	1.1.10	1	512x512	23.6188	24.0886
1.1.11	1	512x512	23.9164	24.5339	1.1.12	1	512x512	24.3408	24.3387
1.1.13	1	512x512	23.4745	23.8738	1.2.01	1	512x512	19.3528	17.8927
1.2.02	1	512x512	20.9138	20.4968	1.2.03	1	512x512	19.6996	17.9534
1.2.04	1	512x512	19.4926	15.6537	1.2.05	1	512x512	18.9658	18.5803
1.2.06	1	512x512	18.7004	16.8299	1.2.07	1	512x512	19.233	18.0798
1.2.08	1	512x512	21.1243	17.5985	1.2.09	1	512x512	21.4742	18.6648
1.2.10	1	512x512	21.2206	19.4243	1.2.11	1	512x512	19.9396	19.2143
1.2.12	1	512x512	19.9032	19.6596	1.2.13	1	512x512	21.6994	21.1308
1.3.01	1	1024x1024	23.7489	24.0035	1.3.02	1	1024x1024	24.3003	24.6372
1.3.03	1	1024x1024	24.8366	24.7016	1.3.04	1	1024x1024	22.7841	23.1178
1.3.05	1	1024x1024	23.2084	23.4763	1.3.06	1	1024x1024	23.9466	24.2909
1.3.07	1	1024x1024	25.1609	25.2108	1.3.08	1	1024x1024	26.2818	25.7896
1.3.09	1	1024x1024	25.7708	24.3014	1.3.10	1	1024x1024	25.7236	25.2343
1.3.11	1	1024x1024	25.0569	25.245	1.3.12	1	1024x1024	24.9334	24.8607
1.3.13	1	1024x1024	24.8516	25.0555	1.4.01	1	1024x1024	25.0708	25.1207
1.4.02	1	1024x1024	25.1326	24.9578	1.4.03	1	1024x1024	25.5018	25.2863
1.4.04	1	1024x1024	26.1066	25.6829	1.4.05	1	1024x1024	25.5789	25.1621
1.4.06	1	1024x1024	25.6528	25.5818	1.4.07	1	1024x1024	25.4561	25.4113
1.4.08	1	1024x1024	25.836	25.6832	1.4.09	1	1024x1024	24.1592	24.0037
1.4.10	1	1024x1024	23.7637	24.2626	1.4.11	1	1024x1024	22.8433	23.4254
1.4.12	1	1024x1024	23.3632	23.9907	1.5.01	1	512x512	26.1268	25.7624
1.5.02	1	512x512	22.0287	20.0545	1.5.03	1	512x512	24.4382	24.6993
1.5.04	1	512x512	23.6949	23.7935	1.5.05	1	512x512	25.5746	25.0831
1.5.06	1	512x512	26.205	25.7627	1.5.07	1	512x512	23.519	24.0738

Table 3.1: Tableau de PSNR des images de textures.

Image	n_c	Format	Ondelettes	Géodelettes	Image	n_c	Format	Ondelettes	Géodelettes
2.1.01	3	512x512	23.694	23.7661	2.1.02	3	512x512	22.6422	21.3552
2.1.03	3	512x512	26.0287	27.6277	2.1.04	3	512x512	23.6852	23.8181
2.1.05	3	512x512	24.6992	25.3561	2.1.06	3	512x512	23.5568	23.4071
2.1.07	3	512x512	25.6325	26.9908	2.1.08	3	512x512	25.801	28.5575
2.1.09	3	512x512	26.4827	29.2987	2.1.10	3	512x512	24.8861	25.9962
2.1.11	3	512x512	25.3628	27.9725	2.1.12	3	512x512	25.1748	26.8276
2.2.01	3	1024x1024	23.5373	23.2184	2.2.02	3	1024x1024	26.622	29.3057
2.2.03	3	1024x1024	26.1727	29.0456	2.2.04	3	1024x1024	24.941	25.997
2.2.05	3	1024x1024	24.5278	25.5919	2.2.06	3	1024x1024	26.6945	29.8314
2.2.07	3	1024x1024	26.2631	28.9867	2.2.08	3	1024x1024	23.6826	23.3973
2.2.09	3	1024x1024	26.0147	27.8218	2.2.10	3	1024x1024	26.2874	28.5797
2.2.11	3	1024x1024	25.3974	27.3533	2.2.12	3	1024x1024	25.4844	26.9747
2.2.13	3	1024x1024	25.4217	27.0078	2.2.14	3	1024x1024	24.8722	26.1823
2.2.15	3	1024x1024	25.4859	26.7964	2.2.16	3	1024x1024	25.3424	27.0841
2.2.17	3	1024x1024	24.3491	25.3167	2.2.18	3	1024x1024	25.0512	26.2026
2.2.19	3	1024x1024	25.6656	27.6577	2.2.20	3	1024x1024	25.9509	28.4925
2.2.21	3	1024x1024	24.7943	25.5979	2.2.22	3	1024x1024	25.9351	27.7786
2.2.23	3	1024x1024	26.9083	30.0382	2.2.24	3	1024x1024	25.3785	26.9878
3.2.25	1	1024x1024	24.9255	24.8974					

Table 3.2: Tableau de PSNR des prises de vue aériennes.

CHAPITRE 3. ONDELETTES ET DISTANCE GÉODÉSIQUE

Image	n_c	Format	Ondelettes	Géodelettes	Image	n_c	Format	Ondelettes	Géodelettes
4.1.01	3	256x256	25.3797	27.5854	4.1.02	3	256x256	25.1697	26.9409
4.1.03	3	256x256	26.2618	28.4861	4.1.04	3	256x256	25.8379	27.0755
4.1.05	3	256x256	25.8349	26.5882	4.1.06	3	256x256	24.2875	23.3547
4.1.07	3	256x256	26.5962	29.8935	4.1.08	3	256x256	26.0421	28.643
4.2.01	3	512x512	26.6633	28.4475	4.2.02	3	512x512	25.1043	26.2029
4.2.03	3	512x512	22.5683	21.0048	4.2.04	3	512x512	25.8633	28.0058
4.2.05	3	512x512	26.0656	26.8878	4.2.06	3	512x512	24.8783	25.0753
4.2.07	3	512x512	25.6864	27.0131	5.1.09	1	256x256	25.5154	25.2084
5.1.10	1	256x256	23.2796	23.5215	5.1.11	1	256x256	26.875	25.2271
5.1.12	1	256x256	25.7921	24.7393	5.1.13	1	256x256	23.8909	17.6664
5.1.14	1	256x256	24.2714	24.5151	5.2.08	1	512x512	25.3428	24.0285
5.2.09	1	512x512	24.1804	24.0749	5.2.10	1	512x512	23.6623	23.8697
5.3.01	1	1024x1024	24.8975	24.8707	5.3.02	1	1024x1024	24.926	24.8834
7.1.01	1	512x512	25.5441	25.5299	7.1.02	1	512x512	26.8332	26.0799
7.1.03	1	512x512	25.6099	25.5293	7.1.04	1	512x512	25.5466	25.565
7.1.05	1	512x512	24.7735	24.9408	7.1.06	1	512x512	24.7574	24.9362
7.1.07	1	512x512	24.9454	25.1791	7.1.08	1	512x512	26.1469	25.7117
7.1.09	1	512x512	25.0917	25.2269	7.1.10	1	512x512	25.6706	25.6825
7.2.01	1	1024x1024	27.2975	24.0337	boat.512	1	512x512	25.2378	24.9153
elaine.512	1	512x512	25.9309	25.5201	gray21.512	1	512x512	26.3168	25.6161
house	3	512x512	25.0524	24.9126	numbers.512	1	512x512	23.6308	20.4159

Table 3.3: Tableau de PSNR d'un ensemble d'images naturelles.

Par contre les résultats sur des images niveaux de gris, et surtout pour les images de textures (tableau 3.1) ne montrent pas une amélioration fréquente du PSNR. Ceci a déjà été discuté dans le cadre de la reconstruction partielle et se confirme ici.

Tous ces résultats ne tiennent bien entendu pas compte de l'amélioration en terme de qualité visuelle que nous avons illustré avec les images des figures 3.22, 3.23 ou 3.24. Notre transformée en ondelettes est plutôt conçue pour la prise en compte séparée des morceaux de fonctions continues. Elle souffre alors des mêmes défauts que la transformée en bandelettes : une trop forte modification des coefficients de la transformée risque de faire émerger des zones dont la valeur s'éloigne fortement du reste de l'image. L'exemple le plus flagrant sont les pixels de bruit isolés qui restent après reconstruction. Ils constituent, du point de vue de notre transformée, une singularité trop importante pour être modifiés par le seuillage et restent donc inchangés après débruitage. Ce problème met en évidence le besoin de méthodes pour remettre en cause la géométrie détectée lorsque celle-ci correspond à une image détériorée.

Nous allons maintenant étudier la deuxième application de restauration : la suppression de l'effet de bloc.

3.8.2 Suppression de l'effet de blocs

Nous allons proposer pour la suppression de l'effet de blocs une méthode faisant intervenir deux outils déjà rencontrés :

- Le filtrage anisotrope permettant de simplifier la géométrie de l'image (vue en tant que variété) afin d'en faciliter l'extraction des singularités de taille importante.
- La reconstruction partielle d'une transformée en limitant le nombre des coefficients de la transformée pour la reconstruction de l'image.

Nous allons donc construire notre méthode de suppression de l'effet de blocs en filtrant en premier lieu l'image détériorée à partir du filtrage anisotrope proposé par Perona et al. [52]. Cette méthode permet de lisser l'image sans détériorer les contours de l'image. Par contre, elle supprime la majeure partie de la texture de l'image. Nous allons donc utiliser la transformée en ondelettes géodésiques pour restituer cette texture. Le but est également de ne pas restituer l'effet de bloc.

Nous allons ensuite appliquer la transformée en ondelettes géodésiques. La première étape va nous permettre d'obtenir une géométrie de l'image qui ne sera pas influencée par l'effet de blocs. Cette géométrie correspondra à l'ensemble des distances géodésiques associé à notre image filtrée. La démarche est similaire à la détection des contours de l'image préalable à la construction des bandes de la transformée en bandelettes. Nous simplifions la géométrie de l'image pour éviter au mieux de prendre en compte la détérioration dans la géométrie de l'image. Nous utilisons ensuite cette géométrie "simplifiée" de l'image pour obtenir les coefficients de la transformée en ondelettes géodésiques (un peu sur le modèle de tests où nous avons interverti les géométries).

C'est à partir de cette étape qu'intervient la deuxième phase : la reconstruction partielle du signal. Nous allons pour cela éliminer 60% des coefficients de la transformée en ondelettes géodésiques appliqué à l'image détériorée. Le but est de supprimer les contours fantômes de l'effet de blocs, sans pour autant supprimer la texture qui pourrait rester dans l'image. Le nombre de coefficients à conserver est pour le moment choisi de manière empirique. Il permet néanmoins d'illustrer le potentiel de la méthode.

Une fois ces coefficients éliminés, nous obtenons l'image restaurée à partir de ces coefficients et des distances géodésiques de l'image dont nous avons simplifié la géométrie.

Le premier test sur l'image Metaballs (figure 3.27) donne de très bons résultats. L'image filtrée semble mieux restaurée que notre résultat final mais cela tient à la façon dont la DCT traduit les contours qui est ensuite interprété comme de la texture par la dernière étape et par conséquent est restitué.

Le deuxième résultat (figure 3.28) est également bon : les contours sont également conservés et cette fois-ci, la dernière étape, en restituant la texture, restitue un meilleur contraste de l'image. Encore une fois, le motif produit par la DCT autour des contours revient après la dernière étape, mais ils sont la condition qui nous permet de restituer la texture des zones uniformes.

Le dernier résultat (figure 3.29) nous donne de très bons résultats si nous prenons en compte la conservation des contours et la restitution de la textures. La texture est certes un peu moins contrastée que dans l'image détériorée mais, comme pour le motif autour

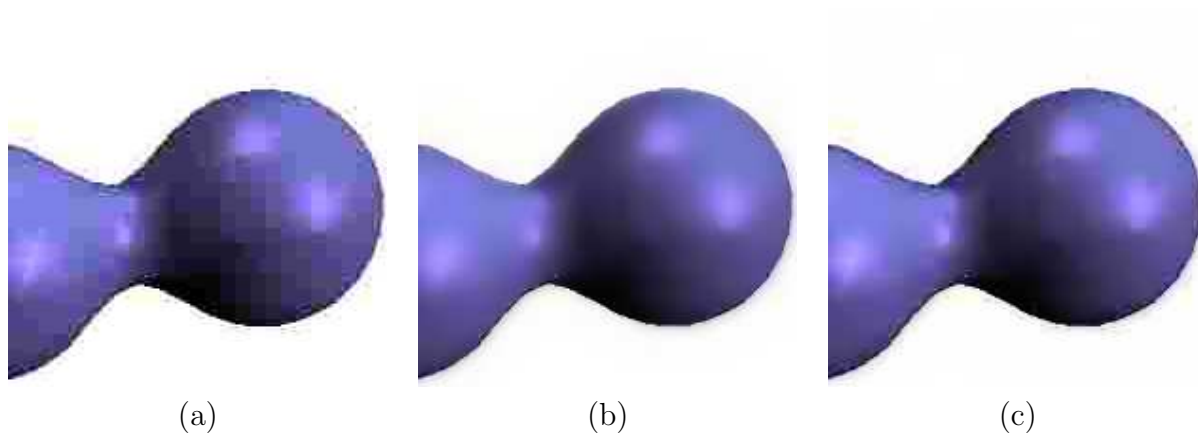


Figure 3.27: Suppression de l'effet de bloc en modifiant la géométrie de l'image. (a) L'image détériorée PSNR = 32.7023 dB. (b) L'image de géométrie simplifiée PSNR = 31.1649 dB. (c) L'image restaurée PSNR = 31.5794 dB.

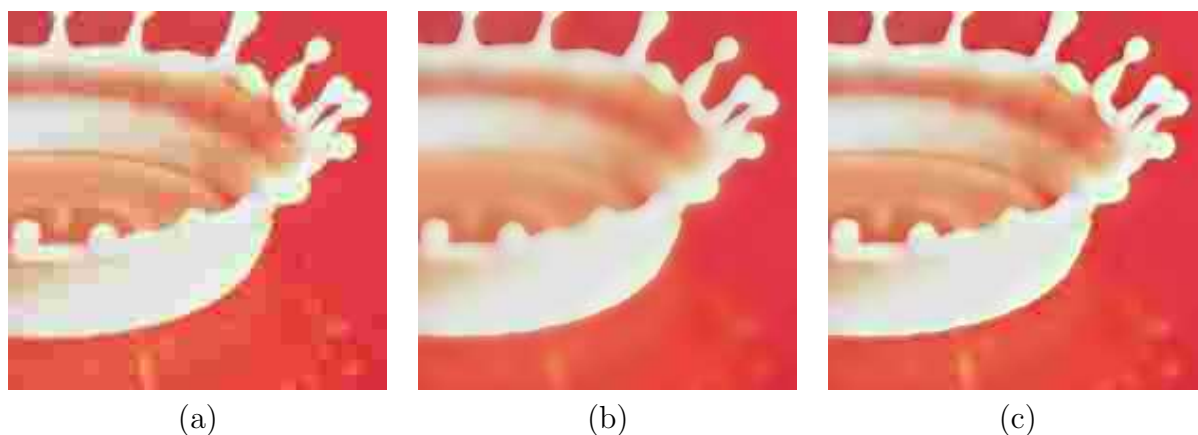


Figure 3.28: Suppression de l'effet de bloc en modifiant la géométrie de l'image. (a) L'image détériorée PSNR = 27.8614 dB. (b) L'image de géométrie simplifiée PSNR = 27.6193 dB. (c) L'image restaurée PSNR = 28.1235.



Figure 3.29: Suppression de l'effet de bloc en modifiant la géométrie de l'image. (a) L'image dégradée PSNR = 21.6335 dB. (b) L'image de géométrie simplifiée PSNR = 20.6316 dB. (c) L'image restaurée PSNR = 21.401 dB.

du contour, nous devons faire des concessions si nous voulons obtenir la suppression de l'effet de bloc et garder les détails de l'image (contours et textures).

Les résultats obtenus pour la suppression de l'effet de blocs sont convaincants mais pour beaucoup, il sont principalement dû à l'utilisation du filtrage anisotrope sur lequel la transformée en ondelettes géodésiques s'appuie pour définir une géométrie simplifiée de l'image.

Il reste à étudier les possibilités qu'offrirait la modification directe des distances géodésiques définissant la géométrie de l'image. Le but serait de s'affranchir du filtrage anisotrope et ainsi gagner en liberté quand à la direction que prendrait la modification de la géométrie représentée par les distance géodésiques.

3.9 Analyses et critiques

Nous avons introduit une transformée en ondelettes géométrique adaptative s'appuyant sur le schéma de Cohen-Daubechies-Feauveau (2, 2), le filtrage bilatéral, la distance géodésique d'un signal vue comme une variété et des treillis quinquiconces entrelacés. Ceci nous a permis, à travers la distance géodésique, de prendre en compte la géométrie de l'image. En effet, la distance géodésique propose une mesure pour répondre à la question : "Les deux pixels a et b de l'image appartiennent-ils à la même zone uniforme?". En répondant à cette question, la distance permet de répondre à la question qui nous intéresse plus particulièrement : "Existe-t-il une singularité entre le pixel a et le pixel b ?".

Les premiers résultats montrent un comportement de la transformée très intéressant qui illustre la manière très particulière dont est tourné le problème. Ils montrent notamment une forme de segmentation qui s'adapte aux motifs de l'image dont la taille varie du pixel à des zones très importantes. L'originalité de cette transformée est qu'elle ne s'adapte

pas à la géométrie en utilisant une estimation d'un champ de direction des gradients de l'image mais bien en définissant une forme de segmentation irrégulière de l'image.

Les résultats que nous avons présentés montrent que la précision de la détection des singularités peut agir au désavantage de l'application visée : certains pixels bruités sont considérés comme des singularités à part entière que la transformée conserve au cours du processus de restauration. Ce problème, en lien avec une meilleure conservation des contours, nous a poussé dans le cadre du débruitage, à augmenter légèrement le seuil pour diminuer le bruit "poivre et sel" obtenu en fin de restauration. Cette première solution nous a permis d'obtenir des résultats très intéressants pour les images couleurs.

Pour l'application de suppression de l'effet de bloc, notre transformée nous permet de nous rapprocher d'une solution permettant de conserver au mieux la texture de l'image tout en supprimant les contours fantômes des blocs de la DCT. Ces objectifs sont pourtant des objectifs contradictoires puisque les contours que nous éliminons sont des singularités au même titre que la texture que nous souhaitons conserver.

Conclusion - Perspectives

L'objectif de cette thèse était l'étude des transformées en ondelettes géométriques. Nous avons présenté le large éventail de décompositions possibles afin de préciser la catégorie dans laquelle s'inscrivent les transformées en ondelettes que nous avons définies : les transformées en ondelettes géométriques adaptatives.

La première transformée que nous avons étudiée est la transformée en bandelettes de première génération. Cette transformée exploite la détection de l'ensemble des contours de l'image pour construire des bandes. Ces bandes sont à leur tour le support de la construction de fonctions d'ondelettes adaptées aux contours. Nous avons proposé une interprétation prenant directement en compte les contraintes liées au passage sur un schéma numérique. L'analyse de cette transformée a été dirigée vers une exploitation dans le cadre de la restauration d'image. Nous présentons des résultats issus de la confrontation de cette transformée aux applications de débruitage et de suppression de l'effet de blocs. Les résultats obtenus présentent une amélioration en terme de PSNR et d'aspect visuel, pour le débruitage. En revanche la restauration concernant l'effet de blocs, nous donne des résultats plus mitigés : la méthode propose d'utiliser la prise en compte des contours de la transformée en bandelettes pour effectuer un filtrage de l'image adapté aux contours. Le problème est que son utilisation, même si elle respecte les contours, laisse trop peu de détails pour que la restauration apporte une réponse efficace, notamment pour les images contenant de la texture. En fait, dans le cadre de nos applications, il nous reste à améliorer l'estimation de nos seuils : il nous faut définir des seuils prenant en compte l'isolement des différentes bandes.

Nous avons alors émis l'hypothèse que la faiblesse de nos restaurations était en partie due au manque de souplesse de la description des singularités à travers les contours. Nous avons donc proposé d'introduire la notion de variété. Dans le cadre de notre transformée, ce qui nous intéresse à travers les variétés est la description de la forme d'un ensemble fini et également l'introduction d'un concept issu de la topologie de la variété : il y a une remise en cause possible de la distribution des composantes connexes du signal en fonction du choix de la topologie associée à l'ensemble. Nous avons alors tout particulièrement étudié les distances géodésiques entre échantillons issus d'une modélisation de notre ensemble par les variétés. Ces distances géodésiques ont ensuite été le support de notre schéma de lifting traduisant une forme de filtrage bilatéral qui nous permet de prendre en compte la géométrie de l'image. La transformée en ondelettes géodésiques met en valeur les singularités à travers des zones dont la taille et la forme sont très variables.

Il n'y a pas de dépendance à une épaisseur de bande ou à tout autre postulat induit par une modélisation de la géométrie de l'image par les contours. En fait chaque coefficient d'ondelettes ou d'échelle est associé à une fonction particulière (conséquence logique de l'adaptabilité de la transformée) dont la forme peut être très variable puisqu'elle peut aller du simple pixel à une taille maximale définie par le support de la fonction issue du schéma Cohen-Daubechies-Feauveau en version non adaptative. Chaque fois qu'une étape de prédiction ou de mise à jour du schéma de lifting est appliquée, se dessine la forme du support de la fonction : les distances géodésiques indiquent en quelque sorte les limites de ce support.

Nous avons encore une fois confronté la transformée étudiée aux applications de débruitage et de suppression de l'effet de blocs. Les résultats sont mitigés dans le cadre du débruitage, mais dans l'ensemble prometteurs, surtout en ce qui concerne les images couleurs. Nous expliquons le manque de résultats par une raison principale : contrairement à la première transformée présentée, nous n'avons pas appliqué de méthodes permettant de modifier la géométrie détectée (elle correspond à la géométrie de l'image détériorée). Le deuxième problème provient de la structure même de la transformée puisqu'il est la conséquence de l'adaptabilité des supports. Cette structure est encore difficile à appréhender, notamment par rapport à l'énergie associée à chaque coefficient, étant données les variations de support correspondant à chaque fonction d'analyse et de synthèse.

La première perspective est donc la rectification du schéma de lifting afin de prendre en compte la correspondance entre la taille du support et l'énergie que doit représenter ce coefficient. Nous avons en effet une reconstruction parfaite et des applications relativement efficaces de cette transformée mais une grande partie des limites que nous avons mises en évidence provient du non respect de la conservation de l'énergie que nous avons pu constater sur les coefficients d'ondelettes.

Ensuite nous souhaitons construire des méthodes de traitement de la géométrie avant reconstruction. L'idée serait de considérer les pondérations impliquées dans les schémas de lifting et issues des distances géodésiques, comme des vecteurs (4 pondérations par coefficient pour définir les étapes de prédiction ou de mise à jour). Ces champs de vecteurs devraient ensuite être modifiés en fonction de la modélisation du signal prenant en compte des *a priori* géométriques. Dans ce cadre, nous pensons plus particulièrement aux méthodes proposées par Druon et al. [35].

L'évolution suivante serait de remettre en cause la méthode utilisée pour calculer les distances géodésiques. Grâce à la définition de cette nouvelle transformée, nous avons beaucoup diminué la taille minimale des singularités prises en compte (elle correspond à 1 pixel). Nous pourrions imposer une surface minimale plus grande des supports de fonctions d'analyse et de synthèse, tout en préservant la précision pour la définition de la forme de ces supports. L'idée serait donc, en amont, de construire une distance géodésique approximée à partir d'une segmentation grossière de l'image. À travers la segmentation, nous pouvons retranscrire la construction des composantes connexes du signal. Nous serions sur une construction binaire de nos supports. En effet, si nous considérons chaque

zone définie par la segmentation comme une composante connexe du signal, avec toutes les conséquences que cela implique au niveau de la distance géodésique, nous aboutirions à une construction de plusieurs transformées en ondelettes indépendantes, ne partageant aucune de leurs informations à une échelle donnée. La séparation des informations peut être limitée à une échelle car nous pourrions remettre en cause la segmentation à chaque nouvelle échelle de la transformée, tout comme nous reconstruisons la distance géodésique sur chaque échelle de la transformée géodésique.

Une dernière perspective réside dans une amélioration des traitements sur l'ensemble des coefficients d'ondelettes pour les deux applications et les deux transformées envisagées. Nous avons uniquement mis en oeuvre l'amélioration de la prise en compte de la géométrie dans nos transformées. Nous pourrions également explorer différentes méthodes d'estimation sur l'ensemble des coefficients de bandelettes ou d'ondelettes géodésiques. Nous pourrions par exemple essayer de transposer l'estimation locale de l'écart-type de la distribution des coefficients [17] pour ces transformées afin d'améliorer les résultats de débruitage. En fait, il serait intéressant de construire une méthode d'estimation de l'écart-type des coefficients de bandelettes par bandes : le risque à prendre en compte est celui d'obtenir des estimations trop différentes d'une bande à l'autre risquant de mener à des résultats de restauration faisant apparaître ces bandes.

Nous avons donc, à travers ces deux transformées, entrevu les approches utilisées pour adapter une transformée à la géométrie de l'image : soit nous déformons l'ensemble pour en améliorer le traitement par la transformée en ondelettes séparables (voir par une transformée en ondelettes 1D), soit nous construisons un ensemble de fonctions d'analyse et de synthèse non séparables (le schéma de lifting devenant pour le coup indispensable à une application raisonnable de la transformée). Les deux approches permettent d'obtenir une vision assez globale des transformées en ondelettes adaptatives. Ces méthodes sont, de par leur pluridisciplinarité (par les méthodes nécessaires à l'identification de la géométrie de l'image) et leur manipulation des concepts de temps, fréquence, espace et échelle, un point de vue très enrichissant pour aborder le traitement d'image. Nous allons donc nous attacher à la mise en oeuvre de ces différentes perspectives, et plus particulièrement celles concernant la transformée en ondelettes géodésiques pour profiter de la liberté qu'elle offre dans la description de la géométrie de l'image. Cette liberté va par exemple nous permettre d'envisager l'exploitation d'une transformée en ondelettes géométriques adaptatives sur des images texturées.

Bibliographie

- [1] B.K. Alpert. *Wavelets and Other Bases for Fast Numerical Linear Algebra*. Academic Press, 1993.
- [2] F. Alter, S. Durand, and J. Froment. Deblocking dct-based compressed images with weighted total variation. *International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 2004.
- [3] E. Andres. Discrete linear objects in dimension n : The standard model. *Graphical Models*, 65 :92–111, 2003.
- [4] E. Andres, R. Acharya, and C. Sibata. Discrete analytical hyperplanes. *Graphical Models and Image Processing*, 59(5) :302–309, September 1997.
- [5] A. Averbuch, A. Schclar, and D. L. Donoho. Deblocking of block-transform compressed images using weighted sums of symmetrically aligned pixels. *IEEE Transactions on Image Processing*, 14 :200–212, February 2005.
- [6] R.H. Bamberger and M.J.T. Smith. A filter bank for the directional decomposition of images : Theory and design. *IEEE Trans. Signal Processing*, 40(4) :882–893, April 1992.
- [7] A. Bijaoui, J.-L. Starck, and F. Murtagh. Restauration des images multi-échelles par l’algorithme à trous. *Traitement du Signal*, 11(3) :229–243, 1994.
- [8] I. Bloch. Fuzzy geodesic distance in images. In *IJCAI ’95 : Selected papers from the Workshop on Fuzzy Logic in Artificial Intelligence, Towards Intelligent Systems*, pages 153–166, London, UK, 1997. Springer-Verlag.
- [9] H. Blum. Biological shape and visual science. *Theoretical Biology*, 38 :205–287, 1973.
- [10] P. Bourdon. *Restauration d’images et de séquences d’images par EDP : contributions et applications en communications numériques*. PhD thesis, Université de Poitiers, Novembre 2004.
- [11] P. J. Burt and E. H. Adelson. The laplacian pyramid as a compact image code. *IEEE Transactions on Communications*, COM-31,4 :532–540, 1983.
- [12] E. Candès. *Ridgelets : Theory and Applications*. PhD thesis, Stanford University, 1998.
- [13] E. Candès and D. Donoho. Curvelets : A surprisingly effective nonadaptive representation of objects with edges. In *Saint-Malo Proceedings*, pages 1–10. Vanderbilt University Press, 2000.

- [14] P. Carré and E. Andres. Discrete analytical ridgelet transform. *Signal Processing*, 84(11) :2165–2173, November 2004.
- [15] V. Chandrasekaran, M. B. Wakin, D. Baron, and R. G. Baraniuk. Compression of higher dimensional functions containing smooth discontinuities. In *38th Annual Conference on Information Science and Systems*, March 2004.
- [16] C.L. Chang and B. Girod. Direction-adaptive discrete wavelet transform for image compression. *IEEE Transactions on Image Processing*, 16(5) :1289–1302, May 2007.
- [17] S.G. Chang, B. Yu, and M. Vetterli. Spatially adaptive wavelet thresholding with context modeling for image denoising. *IEEE Transactions on Image Processing*, 9(9) :1522–1531, September 2000.
- [18] V. Chappelier and C. Guillemot. Oriented wavelet transform on a quincunx pyramid for image compression. In *International Conference on Image Processing*, pages I : 81–84, 2005.
- [19] H. Choi and R. Baraniuk. Multiscale manifold representation and modeling. *ICASSP '05*, 4(iv) :569–572, March 2005.
- [20] D. Coeurjolly, S. Miguet, and L. Tougne. 2d and 3d visibility in discrete geometry : an application to discrete geodesic paths. *Pattern Recognition Letters*, 25(5) :561–570, 2004.
- [21] A. Cohen, I. Daubechies, and J.C. Feauveau. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure & Appl. Mathematics*, 45 :485–560, 1992.
- [22] L.D. Cohen. Chemins minimaux et modeles deformables en analyse d’images. *Traitement du Signal*, 20 :225–241, Décembre 2003.
- [23] R. Coifman and D. Donoho. Translation invariant denoising. Technical Report 475, Dept. of Statistics, Stanford University, may 1995.
- [24] I. Daubechies and W. Sweldens. Factoring wavelet transforms into lifting steps. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 4(3) :247–269, may 1998.
- [25] R. Deriche and D. Tschumperlé. Vector-valued image regularization with pdes : A common framework for different applications. In *Pattern Analysis and Machine Intelligence*, volume 27, April 2005.
- [26] S. Di Zenzo. A note on the gradient of a multi-image. *Comput. Vision Graph. Image Process.*, 33(1) :116–125, 1986.
- [27] E.W. Dijkstra. A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik*, 1 :269–271, 1959.
- [28] W. Ding, F. Wu, and S. Li. Lifting-based wavelet transform with directionnally spatial prediction. In *Picture Coding Symposium*, December 2004.
- [29] M. Do. *Directionnal Multiresolution Image Representation*. PhD thesis, EPFL, 2001.
- [30] M.N. Do and M. Vetterli. The contourlet transform : An efficient directional multiresolution image representation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 14(12) :2091–2106, December 2005.

-
- [31] D. L. Donoho and X. Huo. Beamlets and multiscale image analysis, 2001.
 - [32] D.L. Donoho. Denoising by soft-thresholding. *IEEE Trans. on Information Theory*, 41(3) :613–627, May 1995.
 - [33] D.L. Donoho. Wedgelets : Nearly minimax estimations of edges. *Annals of Statistics*, 27(3) :859–897, 1999.
 - [34] D.L. Donoho. Orthonormal ridgelet and linear singularities. *Mathematical Analysis*, 31 :1062–1099, 2000.
 - [35] M. Druon, B. Tremblais, B. Augereau, and L. David. Modélisation simplifiée d'écoulements fluides par approximation polynomiale. etude temporelle et comparaison avec la décomposition orthogonale aux valeurs propres. In *Congrès Francophone de Techniques Laser (CFTL)*, Septembre 2008.
 - [36] J.C. Fournier. *Théorie des graphes et applications*. Hermes Science Publications, 2006.
 - [37] A. Gouze, M. Antonini, and M. Barlaud. Quincunx lifting scheme for lossy image compression. In *International Conference on Image Processing*, pages Vol I : 665–668, 2000.
 - [38] D. Helbert, P. Carre, and E. Andres. 3-d discrete analytical ridgelet transform. *IEEE Transactions on Image Processing*, 15(12) :3701–3714, December 2006.
 - [39] M. Jansen, H. Choi, S. Lavu, and R.G. Baraniuk. Multiscale image processing using normal triangulated meshes. In *International Conference on Image Processing*, pages II : 229–232, 2001.
 - [40] B. Le Guen, S. Pateux, and J. Weiss. Modèle énergétique pour la représentation d'images par ondelettes déformées. In *CORESA 2006 Proceedings*, 2006.
 - [41] B. Le Guen, S. Pateux, and J. Weiss. Non-geometric energy formulation for adaptive image compression. In *International Conference on Image Processing*, pages IV : 161–164, 2007.
 - [42] E. Le Pennec. *Bandelettes et représentation géométrique des images*. PhD thesis, École Polytechnique, Décembre 2002.
 - [43] E. Le Pennec and S. Mallat. Image compression with geometrical wavelets. In *International Conference on Image Processing*, pages Vol I : 661–664, 2000.
 - [44] C.S. Lee, C.K. Lee, and K.Y. Yoo. New lifting based structure for undecimated wavelet transform. *Electronic Letters*, 36(22) :1894–1895, October 2000.
 - [45] Y. Lu and M.N. Do. Crisp-contourlet : a critically sampled directional multiresolution image representation. In *Proc. SPIE Conf. on Wavelet Applications in Signal and Image Processing*, August 2003.
 - [46] Y. M. Lu and M. N. Do. Multidimensional directional filter banks and surfacelets. *IEEE Transactions on Image Processing*, 04 :918–931, April 07.
 - [47] S. Mallat. *Une exploration des signaux en ondelettes*. Les éditions de l'école Polytechnique, 2000.

- [48] S. Mallat. Geometrical grouplets. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, March 2008.
- [49] J. McNames. A fast nearest-neighbor algorithm based on a principal axis search tree. *Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 23(9) :964–976, September 2001.
- [50] A. Nosratinia. Enhancement of jpeg-compressed images by re-application of jpeg. In *VLSI Signal Processing*, volume 27, pages 69–79, February 2001.
- [51] S. Paris and F. Durand. A fast approximation of the bilateral filter using a signal processing approach. In *European Conference on Computer Vision 2006*, pages IV : 568–580, 2006.
- [52] P. Perona and J. Malik. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(7) :629–639, July 1990.
- [53] G. Peyré. *Géométrie multi-échelle pour les images et les textures*. PhD thesis, École Polytechnique, Décembre 2005.
- [54] G. Peyré. Texture synthesis with grouplets. *Pattern Analysis and Machine Intelligence*, March 2009.
- [55] J. Sankaranarayanan, H. Samet, and A. Varshney. A fast k-neighborhood algorithm large point clouds. In *Point-Based Graphics*, July 2006.
- [56] J.A. Sethian. Fast marching methods. *SIAM Review*, 41(2) :199–235, 1999.
- [57] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Publish or Perish, Inc., 1979.
- [58] J.-L. Starck, E.J. Candès, and D.L. Donoho. The curvelet transform for image denoising. In *International Conference on Image Processing*, page I : 7, 2001.
- [59] V. Strela, J. Portilla, and E.P. Simoncelli. Image denoising using a local gaussian scale mixture model in the wavelet domain. *SPIE*, 4119 :363–371, December 2000.
- [60] W. Sweldens. The lifting scheme : A construction of second generation wavelets. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 29(2) :511–546, 1998.
- [61] W. Sweldens and P. Schröder. Building your own wavelets at home. In *Wavelets in Computer Graphics*, pages 15–87, 1996.
- [62] J.B. Tenenbaum, V. de Silva, and J.C. Langford. A global geometric framework for nonlinear dimensionality reduction. *Science*, 290(5500) :2319–2323, December 2000.
- [63] P. Thévenaz, T. Blu, and M. Unser. Interpolation revisited. *Medical Imaging*, 19(7) :739–758, 2000.
- [64] C. Tomasi and R. Manduchi. Bilateral filtering for gray and color images. In *Proc. of International Conference on Computer Vision*, pages 839–846, 1998.
- [65] B. Tremblais. *De la résolution numérique des EDP à l'extraction de caractéristiques linéiques dans les images : application à la détection multi-échelles d'un arbre vasculaire*. PhD thesis, Université de Poitiers, Décembre 2002.
- [66] D. Tschumperlé. *PDE's Based Regularization of Multivalued Images and Applications*. PhD thesis, Université de Nice - Sophia Antipolis, December 2002.

- [67] D. Tshcumperlé and R. Deriche. Diffusion pde's on vector-valued images : Local approach and geometric viewpoint. *IEEE Signal Processing Magazine*, October 2002.
- [68] M. B. Wakin, J. K. Romberg, H. Choi, and R. G. Baraniuk. Wavelet-domain approximation and compression of piecewise smooth images. *IEEE Transactions on Image Processing*, 15(5), May 2006.
- [69] Z. Wang and D.P. Zhang. A novel approach for reduction of blocking effects in low bit rate image compression. *IEEE Trans. on Communications*, 46(6) :732–734, June 1998.
- [70] Z.X. Xiong, M.T. Orchard, and Y.Q. Zhang. A deblocking algorithm for jpeg compressed images using overcomplete wavelet representations. *IEEE Trans. on Circuits and Systems for Video Tech.*, 7(2) :433–437, April 1997.
- [71] Y. Yang, N.P. Galatsanos, and A.K. Katsaggelos. Recovery methods for postprocessing of compressed images. In *Handbook of Image and Video Processing*, pages 761–774. Academic Press, May 2000.
- [72] Y.Y. Zhang and P.S.P. Wang. A new parallel thinning methodology. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 8 :999–1011, 1994.

Ondelettes géométriques adaptatives : vers une utilisation de la distance géodésique

Résumé : La transformée en ondelettes a été introduite ces dernières années dans le domaine du traitement des données multimédia car elle permet une représentation compacte des informations. Cette transformée conçue initialement pour les signaux 1D, ne s'appuie pas sur les spécificités des signaux 2D. Afin de prendre en compte ces spécificités, plusieurs transformées en ondelettes géométriques ont été proposées : nous en étudions deux propositions dans cette thèse. Plus particulièrement, nous allons présenter deux transformées en ondelettes géométriques adaptatives, c'est à dire, deux transformées en ondelettes dont l'ensemble des fonctions d'analyse et de synthèse est défini à partir de l'identification des singularités de l'image. La première transformée, définie par Le Pennec, s'appuie sur une détection des contours pour extraire et traiter séparément des bandes de l'image. La deuxième transformée s'appuie quand à elle, sur un ensemble de mesures de la distance géodésique spécifique au signal traité. Cet ensemble de mesures est ensuite exploité à travers un schéma de lifting pondéré. Ces deux transformées sont confrontées aux applications de suppression de bruit et de suppression de l'effet de bloc lié à la compression JPEG. Nous commenterons ces résultats afin de mettre en évidence les apports ainsi que les limites de ces approches.

Adaptive geometrical wavelets : to geodesic distance use

Abstract : Wavelets transform has been introduced last years in the domain of multimedia data processing because they enable a sparse information representation. This transform initially conceived for one dimensional signals, do not use two dimensional signal's specificities. In order to take into account these specificities, several geometrical wavelets transforms have been proposed : two propositions are studied in this thesis. More particularly, we introduce two adaptive geometrical wavelets transforms, *i.e.*, two geometrical wavelets transforms which analysis and synthesis functions are defined once singularities of the image are identified. First transform, defined by Le Pennec, is based on the detection of edges of the image to extract and process separately strips of the image. The second transform is based on a set of measures of geodesic distance specific to the treated signal. This set is then used in a weighted lifting scheme. Both transform are confronted to the suppression of noise and to the suppression of block effect due to JPEG compression. We will comment these results in order to emphasize gains and limits of both approaches.

Mots-clés : Ondelettes, bandelettes, distance géodésique, débruitage, effet de blocs

Discipline : Traitement du signal et des images.

LEBRUN Guillaume - Laboratoire XLIM-SIC, département Signal, Images et communications
Bât. SP2MI - Téléport 2, Bd Pierre et Marie Curie - BP 30179 - 86962 Futuroscope Cedex